

植物進化アルゴリズムの性能解析

余俊[†], 高木英行^{††}

九州大学大学院芸術工学府[†], 九州大学大学院芸術工学研究院^{††}

1 はじめに

広く産業応用に使われるようになった進化計算は, 実用問題が複雑になるにつれ, より高性能化が求められている. 新しい進化計算アルゴリズムを開発することは, 既存アルゴリズムの部分改良よりも, より性能向上の期待がある. これまでに提案されてきた進化計算は同じような枠組みの下のアルゴリズムとは言え, 個々にユニークな最適化特性を持っている.

新しい進化計算である植物進化 (VEGE)¹⁾ は, 局所探索と広域探索とのバランスを取るよう植物の生長と再生が繰り返す様を模擬したアルゴリズムである. まだ提案されたばかりであるため, 改良の余地は大きい. VEGEアルゴリズムの要素を解析することで, 改良ポイントと, より良い応用方法の指針を得ることが期待できる.

本論文の主目的は, VEGEアルゴリズムの性能に対する各構成要素の影響を調べることにある. そして, 最適化問題に適用する際のパラメータ設定についての汎用的な知見を得る. 最後に, 今後の課題を示し, 有望な研究方向を述べる.

2 植物進化アルゴリズム

自然界では, 多くの植物が種から成長するまでに時間をかけ, 生存のための独自のメカニズムを使っている. 成熟するまでの成長時間は植物によって異なるが, 成熟した個体は個体群生存のために新しい種を作り出す. 一般的に多くの植物は, 1個ではなく多数の種を作ってあちこちに拡散させる. 種が辿り着いた環境が適していれば, その地で次の世代の生成サイクルを繰り返す.

この過程にヒントを得て, 我々は新しい進化計算の枠組みであるVEGEアルゴリズムを提案した¹⁾. VEGEでは, 種を探索個体であると考え,

個体群を構成する. 各個体の成長過程は「成長期」と「成熟期」に分けられ, 各個体は成長期と成熟期で性質の異なる探索を行う. 個体が成熟すると, 複数の種個体 (子個体) を生成する. 現世代で生成された全種個体は一時種個体群を構成する. 最後に, 現世代個体群と一時種個体群の混合プールから次世代の個体を選択される. 上述過程は終了条件に達するまで繰り返され, その過程で最適解を探し出す. Fig. 1は, 提案VEGEアルゴリズムの一般的な過程を示す.

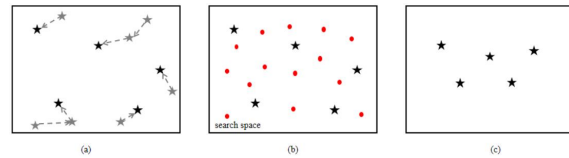


Fig. 1 VEGEアルゴリズムの探索過程. (a) 初期個体をランダムに生成. 破線矢印は局所領域内での個体の生成方向を示す. (b) 各個体は複数の種個体を生成. 赤丸は種個体を表し, 全種個体は一時種個体群を生成する. (c) 現世代個体と種個体群から次世代個体を選択. 停止条件が満たされるまで上述(b)(c)を繰り返す.

3 実験設定

より深くVEGEアルゴリズムを理解するため, アルゴリズムの各構成要素とパラメータ設定が性能に与える影響を分析できるように制御した実験シリーズを設計する. 上述の通り, 成長期と成熟期がVEGEの主要演算期であるので, (1) この二つの演算期の重要性, (2) 成長期の成長サイクル数, (3) 成熟期に各個体が生成する種個体数, (4) 個体数, の各々が性能に与える影響を評価する. 以下, 実験の詳細を述べる.

なお, 第4節の各実験結果表では, 実験1~実験4で示すVEGE番号を使う. 比較対象用に用意した標準VEGEのパラメータ設定 (Table 1) は, 実験1~4でまったく同じである.

Performance Analysis of Vegetation Evolution

[†] Jun Yu (yujun@kyudai.jp)

^{††} Hideyuki Takagi

(<http://www.design.kyushu-u.ac.jp/~takagi/>)

Graduate School of Design, Kyushu University ([†])

Faculty of Design, Kyushu University (^{††})

実験1

VEGEは、大局的最適解を求めるために植物が成長と成熟を世代毎に繰り返す過程を模擬しており、二つの核となる演算期である成長期と成熟期からなる。二つの演算期に割り振る計算資源がVEGEの性能に直接影響を与える。片方の演算期に過剰に偏りすぎるとうまく働かなくなるが、両者の演算のバランス次第でアルゴリズムを効率的にできる鍵でもある。したがって、核となるこれら演算期の影響とこれらの適用順による性能の違いを解析するよう実験1を設計する。実験では全パラメータを同じにして、以下の4通りのVEGAを比較する。

1. 成長期 成熟期の順に演算を行う標準のVEGE
2. 成熟期 成長期の逆順に演算を行うVEGE
3. 成熟期のないVEGE
4. 成長期のないVEGE

実験2

通常のVEGEでは、成長期が局所探索を担当する。各個体はランダムに新しい子個体を一定の探索範囲に生成し、勝者個体が次世代に生き残る。ここでは、成長回数を決める「成長サイクル」が重要な役割を担う。大きく設定すると、個体はより多くの局所探索をするようになり、相対的に大局的最適解探索が弱くなる。そこで実験2では、成長サイクル値による性能を調べる。この実験では、成長サイクルのパラメータ以外を同じにして実験を行う。

1. 成長サイクル値を2に設定したVEGE
2. 成長サイクル値を6に設定したTable 1のVEGE
3. 成長サイクル値を10に設定したVEGE

実験3

成熟期は広域探索を担当し、VEGE性能を決定付けるもう一つの重要な要素である。成長期の各個体は、1子個体生成ではなく多くの種個体を生成して多様性を増やす。その後、fitnessの良い順に個体数分が次世代に生き残る。したがって、生成する種個体数は広域探索能力影響を与える要素である。この値を大きくすると、広い領域を探索できるが収束速度は遅くなる。逆に

すると、局所最適解にトラップされる可能性が高くなる。したがって、生成する種個体の影響を調べ、適切なパラメータ値を見つけることを期待して、実験3を設計する。

1. 成熟期の各個体が種個体2個を生成するVEGE
2. 成熟期の各個体が種個体6個 (=総種個体数60 / 個体数10) を生成するTable 1のVEGE
3. 成熟期の各個体が種個体10個を生成するVEGE

実験4

個体数も性能に影響をあたえる重要な要素である。多くの方は個体数決定の汎用的なルールを得たいと期待するが、適切な設定ガイドラインはない。一般に、不適切な個体数は収束速度が遅くなり、収束しない場合も出てくる。したがって、個体数の影響を調べ、個体数の経験的な値が得られることを期待して、実験4を設計する。ここでは個体数以外のパラメータを同じにして実験する。

1. 個体数5のVEGE
2. 個体数10のTable 1のVEGE
3. 個体数15のVEGE

4 評価実験

比較評価実験には、単目的実数値最適化問題のCEC2013ベンチマーク関数²⁾の28関数を用いる。これらの関数には、変数間依存、回転、探索領域の境界上の大局的最適解、単峰性と多峰性、のfitness景観特性を含む。

Table 1のVEGEを基準として他の条件のVEGEと比較する。各ベンチマーク関数毎に、30試行×三つの次元(2-D, 10-D, 30-D)回数の評価を行い、fitness計算回数で収束を評価する。その後、停止条件(最大fitness計算回数時)での30試行平均のfitness値間の差の検定を行う。実験1~実験4の統計検定結果をTable 2~5に示す。

5 考察

本論文の目的は、VEGAの各構成要素と性能に与えるパラメータ設定の影響について解析することである。この解析をすることで、VEGAの理解が一層深まり、異なる性質の様々な問題に

Table 1 VEGE アルゴリズムのパラメータ設定

2-D, 10-D, 30-D 探索時の個体数	10
成長サイクル	6
成長範囲	$[-1,1]$ の乱数
2-D, 10-D, 30-D 探索時の種個体数	60
移動スケールリング	$[-2,2]$ の乱数
-D, 10-D, 30-D 探索時の終了条件: 最大fitness計算回数	1000, 10,000, 40,000

対応できるパラメータ調整への知見を得ることに役立つ。さらに、例えば、適応パラメータや多峰性問題などにも性能を発揮するより強力な改良版の開発にもつながる。

実験1では、VEGAの核となる成長期と成熟期のバランスについて解析した。両者の良いバランスを取ることが、VEGA性能を向上させることにつながる。実験結果から、(1) 成熟期が探索性能に大きく影響を与え、成長期はそれほどでもないこと、(2) 両者の組み合わせが場合によっていっそう性能改善に繋がること、が明らかとなった。

成長期と成熟期の適用順は性能に若干影響するものの、大きな違いではない。恐らくこれは、成熟期に多くの種個体を生成するので、多様性と探索能力が高い個体が比例して多く生成されるからであろう。これはまた、VEGEの局所探索能力を一層改善する余地があることを示唆している。すなわち、いかに効果的な局所探索を実現するかは今後のVEGEの改良方向の一つである。

実験2では、成長期の演算をより詳しく解析した。成長期の目的は、局所領域内に多くの有力な個体を生成することであり、この性能は主に局所探索数、成長期、探索戦略で決まる。この実験では、成長サイクルの影響を調べるように設計した。実験結果から、成長サイクルはVEGE性能に影響を与えることが明らかになった。一般に少ない成長サイクル程、探索性能が良い。次元数が増えるにつれて、成長サイクルも適切に増やしていく必要がある。いずれにせよ、大きすぎる成長サイクルは勧められず、次元数増加に伴って徐々に増やすべきである。適応成長サイクルの開発が今後のより良い性能実現の方法であろう。

実験3では、成熟期演算の各個体が生成する種個体数の影響を解析した。成熟期演算の個体は種個体を多く生成し拡散させることで広域探索を実現する。少なすぎると有力種個体を生成することができなくなり広域探索能力が低下し、多すぎると余計なfitness計算コストが増える。実験

結果からは、生成する種個体数は性能に大きな影響を与えるキー要素ではないけれど、小さすぎない数にすることがお勧めである。多すぎても、最大で個体数分しか次世代に残せないため、多くの種個体が選択時に致死になる。いかに種個体を利用するかが今後の研究の一つである。

実験4では、個体数の影響を解析した。高計算コストのfitness計算は実用上のホットな話題である。実験条件数が少ないため、今回の実験結果からは、次元が増えるに連れて個体数を増やすべき、という一般的な知見以上は得られていない。大きな個体数であれば、高次元探索空間でも多様な種個体をばらまくために必要な十分な差分ベクトルが得られることによるものであろう。個体数を N とすると、 $(N^2 - N)$ 方向の拡散方向が得られる。このように次元数の増加に合わせて個体数も増やすべきである。

6 結論

VEGEアルゴリズムの影響を与える要因を解析した結果、成熟期が主に性能に影響を与え、成長期はそれほどでもないことが明らかになった。また、種個体数は性能に大きな変動を与えることはないが、成長サイクルは大きく影響することも明らかになった。成長サイクルは大き過ぎないようにすべきである。最後に、個体数が少ない場合は収束が悪くなることが分かったので、次元数が大きくなるにつれて個体数も大きくすべきである。

今後は、局所探索のために新しい戦略、および、最適化能力向上のための効果的なメカニズム開発を行う予定である。

謝辞

本研究はJSPS科学研究費(課題番号 18K11470)の助成を受けたものである。

参考文献

- 1) J. Yu and H. Takagi, "Vegetation Evolution for Numerical Optimization," JPNSEC International Workshop on Evolutionary Computation, Shenzhen, China, pp.49-54 (August 31 - September 1, 2018).
- 2) J. J. Liang, B. Y. Qu, P. N. Suganthan, and G. H. Alfredo, "Problem definitions and evaluation criteria for the CEC 2013 special session on real-parameter optimization." http://al-roomi.org/multimedia/CEC_Database/CEC2013/RealParameterOptimization/CEC2013_

Table 2 実験1の検定結果. 4手法間の30試行平均値の差の検定 (Friedman検定とHolmの多重検定) 結果を示す. 番号は実験1で述べた手法番号である. ($A \gg B$) と ($A > B$) は A が B よりも各々危険率1%と5%で有意であり, ($A \approx B$) は有意差があるとは言えないことを示す.

	2D	10D	30D
F_1	$1 \approx 2 \gg 4 \gg 3$	$4 \gg 2 \approx 1 \gg 3$	$2 \approx 1 \approx 3 > 4$
F_2	$2 \approx 1 \approx 4 \gg 3$	$4 \approx 2 \approx 1 \approx 3$	$3 > 4 \gg 1 \approx 2$
F_3	$2 \approx 1 \approx 4 \gg 3$	$2 \approx 1 > 4 \gg 3$	$2 \approx 1 \gg 4 > 3$
F_4	$1 \approx 2 \approx 4 \approx 3$	$2 \approx 1 \approx 4 \approx 3$	$1 \approx 4 \approx 2 \gg 3$
F_5	$4 \gg 1 > 2 \gg 3$	$4 \gg 1 \approx 2 \gg 3$	$4 \gg 2 \approx 1 \gg 3$
F_6	$4 \approx 1 \approx 2 \gg 3$	$4 \approx 1 \approx 2 \approx 3$	$1 \approx 3 \approx 2 > 4$
F_7	$4 \gg 2 \approx 1 \gg 3$	$4 \gg 1 \approx 2 \gg 3$	$4 \gg 1 \approx 2 \gg 3$
F_8	$4 > 2 > 1 \gg 3$	$1 \approx 4 \approx 2 \approx 3$	$1 \approx 4 \approx 2 \approx 3$
F_9	$4 \gg 2 \approx 1 \gg 3$	$4 \gg 2 \approx 1 \gg 3$	$2 \approx 1 \gg 4 \gg 3$
F_{10}	$4 \approx 1 \approx 2 \gg 3$	$4 \gg 2 \approx 1 \gg 3$	$3 \gg 1 \approx 2 \gg 4$
F_{11}	$4 > 2 \approx 1 \gg 3$	$2 \approx 1 \approx 4 \gg 3$	$4 \gg 1 \approx 2 \gg 3$
F_{12}	$2 \approx 1 \approx 4 \gg 3$	$1 \approx 2 > 4 \gg 3$	$2 \approx 1 \approx 4 \gg 3$
F_{13}	$2 \approx 1 \approx 4 \gg 3$	$2 \approx 1 \gg 4 \gg 3$	$2 \approx 1 > 4 \gg 3$
F_{14}	$2 \approx 1 \approx 4 \gg 3$	$4 \approx 2 \approx 1 \gg 3$	$2 \approx 1 > 3 \approx 4$
F_{15}	$2 \approx 4 \approx 1 \gg 3$	$2 \approx 1 \gg 3 \gg 4$	$2 \approx 1 \approx 3 \gg 4$
F_{16}	$3 \approx 1 \approx 4 \approx 2$	$3 > 2 \approx 1 \approx 4$	$3 \approx 1 \approx 2 \gg 4$
F_{17}	$2 \approx 4 \approx 1 \gg 3$	$4 > 1 \approx 2 \gg 3$	$4 \gg 1 \approx 2 \gg 3$
F_{18}	$2 \approx 1 \approx 4 \gg 3$	$1 \approx 2 \approx 4 \gg 3$	$1 \approx 2 \approx 4 \gg 3$
F_{19}	$4 \approx 2 \approx 1 \gg 3$	$4 > 1 \approx 2 \gg 3$	$4 \approx 2 \approx 1 \gg 3$
F_{20}	$4 > 2 > 1 \gg 3$	$2 \approx 1 \approx 4 \gg 3$	$1 \approx 2 \approx 4 \gg 3$
F_{21}	$4 \gg 2 > 1 \gg 3$	$3 \approx 2 \approx 1 \approx 4$	$3 \gg 4 \approx 2 \approx 1$
F_{22}	$4 \approx 2 \approx 1 \gg 3$	$4 > 2 \approx 1 \gg 3$	$4 \approx 1 \approx 2 \gg 3$
F_{23}	$4 \approx 1 \approx 2 \gg 3$	$2 \approx 1 \gg 3 > 4$	$1 \approx 2 \gg 3 \gg 4$
F_{24}	$4 > 1 \approx 2 \gg 3$	$2 \approx 4 > 1 \gg 3$	$4 \gg 2 \approx 1 \gg 3$
F_{25}	$1 \approx 2 \approx 4 \gg 3$	$4 \approx 2 \approx 1 \gg 3$	$4 \gg 1 \approx 2 \gg 3$
F_{26}	$4 \approx 2 \approx 1 \gg 3$	$2 \approx 1 \approx 4 \gg 3$	$2 \approx 1 \approx 4 \approx 3$
F_{27}	$2 \approx 1 \approx 4 \gg 3$	$4 \gg 3 \approx 1 \approx 2$	$4 \gg 3 \approx 2 \approx 1$
F_{28}	$2 \approx 1 \approx 4 \gg 3$	$4 \gg 2 \approx 1 \gg 3$	$1 \approx 2 \approx 4 \gg 3$

Table 3 実験2の検定結果. 3手法間の30試行平均値の差の検定 (Friedman検定とHolmの多重検定) 結果を示す. 番号は実験2で述べた手法番号である. 記号の意味はTable 2と同じである.

	2D	10D	30D
F_1	$1 \gg 2 \gg 3$	$1 \gg 2 \gg 3$	$1 \approx 3 \approx 2$
F_2	$1 \approx 3 \approx 2$	$1 \approx 3 \approx 2$	$3 \approx 2 \gg 1$
F_3	$2 \approx 1 \approx 3$	$1 \gg 2 \approx 3$	$3 > 2 \gg 1$
F_4	$2 > 3 \approx 1$	$1 \approx 2 \approx 3$	$1 > 2 > 3$
F_5	$1 \gg 2 \gg 3$	$1 \gg 2 \gg 3$	$3 \gg 2 \gg 1$
F_6	$1 \approx 2 \approx 3$	$3 \approx 2 \approx 1$	$2 \approx 3 > 1$
F_7	$1 \gg 2 > 3$	$1 \gg 2 \gg 3$	$1 > 2 \approx 3$
F_8	$1 \gg 2 \approx 3$	$2 \approx 1 \gg 3$	$2 \approx 3 \approx 1$
F_9	$1 \gg 2 \approx 3$	$1 \approx 2 \approx 3$	$2 \approx 3 \approx 1$
F_{10}	$1 > 2 > 3$	$1 \gg 2 \approx 3$	$3 > 2 \gg 1$
F_{11}	$1 \gg 3 \approx 2$	$1 \gg 3 \approx 2$	$3 \approx 1 \approx 2$
F_{12}	$1 \approx 2 \approx 3$	$1 \approx 3 \approx 2$	$1 \approx 2 \approx 3$
F_{13}	$1 \gg 2 \approx 3$	$1 \gg 2 > 3$	$1 \approx 2 \approx 3$
F_{14}	$1 \approx 2 \approx 3$	$1 \approx 2 \approx 3$	$3 \approx 2 \approx 1$
F_{15}	$1 \approx 2 \approx 3$	$1 \approx 2 \approx 3$	$3 \approx 1 \approx 2$
F_{16}	$1 \approx 2 \approx 3$	$3 > 2 \approx 1$	$3 \approx 2 \approx 1$
F_{17}	$1 \approx 3 \approx 2$	$1 > 2 > 3$	$1 \gg 2 \gg 3$
F_{18}	$1 \approx 2 \approx 3$	$1 \approx 2 \approx 3$	$1 > 2 > 3$
F_{19}	$2 \approx 1 > 3$	$1 \approx 2 \approx 3$	$1 > 2 > 3$
F_{20}	$1 \gg 2 \approx 3$	$1 \approx 2 \approx 3$	$1 \approx 2 \approx 3$
F_{21}	$1 \gg 3 \approx 2$	$2 > 3 \gg 1$	$1 > 2 \approx 3$
F_{22}	$1 > 2 \approx 3$	$1 \approx 2 \approx 3$	$1 \approx 2 \approx 3$
F_{23}	$2 \approx 1 \approx 3$	$1 \approx 3 \approx 2$	$1 \approx 2 > 3$
F_{24}	$2 > 1 \gg 3$	$3 \gg 1 > 2$	$1 > 2 \approx 3$
F_{25}	$2 \approx 1 \gg 3$	$1 \gg 2 \approx 3$	$1 > 2 > 3$
F_{26}	$1 \approx 2 \approx 3$	$2 \approx 1 \approx 3$	$1 \gg 3 \approx 2$
F_{27}	$2 > 1 > 3$	$1 > 2 > 3$	$1 \approx 2 \approx 3$
F_{28}	$1 \gg 2 > 3$	$2 > 3 \gg 1$	$3 \approx 2 \gg 1$

Table 4 実験3の検定結果．3手法間の30試行平均値の差の検定（Friedman検定とHolmの多重検定）結果を示す．番号は実験3で述べた手法番号である．記号の意味はTable 2と同じである．

	2D	10D	30D
F_1	$2 \approx 1 \approx 3$	$3 \approx 2 \gg 1$	$2 \approx 1 \approx 3$
F_2	$1 \approx 2 \approx 3$	$1 \approx 3 \approx 2$	$1 \gg 2 \approx 3$
F_3	$3 \approx 1 \approx 2$	$3 \approx 2 \approx 1$	$1 \approx 3 \approx 2$
F_4	$2 \approx 1 \approx 3$	$2 \approx 3 \approx 1$	$3 \approx 2 \gg 1$
F_5	$2 > 3 \approx 1$	$2 \approx 3 \gg 1$	$1 \gg 2 \gg 3$
F_6	$2 \approx 3 \gg 1$	$2 \approx 3 \approx 1$	$2 \approx 1 \approx 3$
F_7	$2 \approx 3 \gg 1$	$3 \approx 2 \gg 1$	$3 \approx 2 > 1$
F_8	$3 \approx 2 > 1$	$2 \approx 1 \approx 3$	$2 \approx 3 \approx 1$
F_9	$2 \approx 3 \approx 1$	$3 \approx 2 > 1$	$2 \approx 3 \approx 1$
F_{10}	$2 \approx 3 \approx 1$	$3 \approx 2 \approx 1$	$1 \gg 2 \gg 3$
F_{11}	$3 \approx 2 \approx 1$	$3 \approx 2 \approx 1$	$3 \approx 2 \approx 1$
F_{12}	$2 \approx 3 \approx 1$	$2 \approx 3 \approx 1$	$3 > 2 \approx 1$
F_{13}	$3 \approx 2 \approx 1$	$3 \approx 2 \approx 1$	$3 \approx 2 \gg 1$
F_{14}	$2 \approx 3 \approx 1$	$3 \approx 2 \approx 1$	$2 \approx 3 \approx 1$
F_{15}	$2 \approx 3 \approx 1$	$3 \approx 2 \approx 1$	$3 \approx 2 \approx 1$
F_{16}	$3 \approx 1 \approx 2$	$1 \gg 3 \approx 2$	$1 \approx 2 > 3$
F_{17}	$3 \approx 1 \approx 2$	$3 \approx 2 \gg 1$	$3 > 2 \gg 1$
F_{18}	$3 \approx 2 \approx 1$	$3 \approx 2 \gg 1$	$3 \approx 2 \gg 1$
F_{19}	$3 \approx 2 \approx 1$	$2 \approx 3 \gg 1$	$3 \approx 2 \gg 1$
F_{20}	$3 > 2 \approx 1$	$3 \approx 2 \approx 1$	$2 \approx 3 > 1$
F_{21}	$3 \approx 2 \approx 1$	$1 \approx 3 \approx 2$	$1 \approx 3 \approx 2$
F_{22}	$3 \approx 2 \approx 1$	$3 \approx 2 \approx 1$	$2 \approx 3 \approx 1$
F_{23}	$2 \approx 3 \approx 1$	$3 \approx 2 > 1$	$2 \approx 3 > 1$
F_{24}	$2 \approx 3 \approx 1$	$3 \approx 2 \gg 1$	$3 \approx 2 \gg 1$
F_{25}	$2 \approx 3 > 1$	$3 > 2 \approx 1$	$3 \approx 2 > 1$
F_{26}	$3 \approx 1 \approx 2$	$3 \approx 2 \approx 1$	$3 \approx 2 \approx 1$
F_{27}	$3 \approx 2 \approx 1$	$2 \approx 3 \gg 1$	$3 \approx 2 \approx 1$
F_{28}	$3 \approx 2 \approx 1$	$3 \approx 2 \gg 1$	$2 \approx 3 \approx 1$

Table 5 実験4の検定結果．3手法間の30試行平均値の差の検定（Friedman検定とHolmの多重検定）結果を示す．番号は実験4で述べた手法番号である．記号の意味はTable 2と同じである．

	2D	10D	30D
F_1	$1 \gg 2 \gg 3$	$1 \gg 2 \gg 3$	$1 \gg 2 \gg 3$
F_2	$3 \approx 2 \approx 1$	$1 \approx 3 \approx 2$	$1 \gg 2 > 3$
F_3	$1 \approx 3 \approx 2$	$2 \approx 1 \gg 3$	$1 \approx 2 \gg 3$
F_4	$2 \approx 3 \approx 1$	$2 \approx 1 \approx 3$	$1 \gg 2 \approx 3$
F_5	$1 \gg 2 \gg 3$	$1 \gg 2 \gg 3$	$1 \gg 2 \gg 3$
F_6	$3 \approx 2 \approx 1$	$1 > 3 \approx 2$	$2 \approx 1 > 3$
F_7	$2 \gg 1 \gg 3$	$2 > 3 \approx 1$	$2 \approx 3 \approx 1$
F_8	$1 \gg 2 \approx 3$	$2 \approx 1 \approx 3$	$2 \approx 3 \approx 1$
F_9	$1 \gg 2 > 3$	$1 \approx 2 > 3$	$1 \approx 2 \approx 3$
F_{10}	$1 \approx 2 \gg 3$	$1 \gg 2 \gg 3$	$1 \gg 2 \gg 3$
F_{11}	$3 \approx 2 \approx 1$	$2 \approx 3 > 1$	$3 \approx 2 \approx 1$
F_{12}	$2 \approx 3 \approx 1$	$3 \approx 2 \approx 1$	$2 \approx 3 \approx 1$
F_{13}	$3 \approx 2 \approx 1$	$3 \approx 2 \approx 1$	$3 \approx 2 \gg 1$
F_{14}	$2 > 3 \approx 1$	$2 \approx 3 > 1$	$2 \approx 1 \approx 3$
F_{15}	$2 \approx 3 \approx 1$	$3 \approx 2 \approx 1$	$3 \approx 2 \approx 1$
F_{16}	$1 \approx 2 \approx 3$	$1 \approx 3 \approx 2$	$2 \approx 1 \approx 3$
F_{17}	$1 > 3 \approx 2$	$1 \approx 2 \gg 3$	$2 \approx 1 \gg 3$
F_{18}	$1 \approx 3 \approx 2$	$1 > 2 > 3$	$2 \approx 1 > 3$
F_{19}	$2 \approx 1 \approx 3$	$1 > 2 \gg 3$	$3 \gg 2 \approx 1$
F_{20}	$1 \gg 2 \approx 3$	$2 \approx 1 \approx 3$	$2 \approx 3 \approx 1$
F_{21}	$3 > 2 > 1$	$3 \approx 2 \approx 1$	$1 \approx 2 > 3$
F_{22}	$2 \approx 3 \approx 1$	$3 \approx 2 \approx 1$	$2 \approx 3 \approx 1$
F_{23}	$3 \approx 2 \approx 1$	$3 \approx 2 > 1$	$2 \approx 3 \gg 1$
F_{24}	$2 \approx 3 \approx 1$	$2 \approx 1 \approx 3$	$2 \approx 1 \approx 3$
F_{25}	$3 \approx 2 \approx 1$	$2 \approx 1 \approx 3$	$2 \approx 1 \gg 3$
F_{26}	$3 \approx 2 \approx 1$	$3 \approx 2 \approx 1$	$3 \approx 2 \approx 1$
F_{27}	$3 \approx 2 \approx 1$	$2 \gg 1 \approx 3$	$1 \approx 2 \approx 3$
F_{28}	$3 \approx 2 \approx 1$	$2 > 3 \gg 1$	$1 \gg 2 \gg 3$