微分形式

野本 隆宏

2008 年 8 月 27 日

1　外積代数

1.1　ベクトル空間

集合 V が次のような条件を満たすとき、**実数 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間**であるという。まず V の元の間に和 ($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V$) とスカラー倍 ($a \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \in V$ に対して $a\boldsymbol{x} \in V$) という演算が定義されている。そしてそれらの演算は次の 8 つの条件を満たす。

1. (結合法則)　$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$
2. (交換法則)　$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$
3. (単位元)　$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$ を満たすような特別な元 $\boldsymbol{0} \in V$ が存在する。
4. (逆元)　すべての $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ となるような逆ベクトル $-\boldsymbol{x}$ が存在する。
5. (スカラー倍との分配法則 1)　$a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}$
6. (スカラー倍との分配法則 2)　$(a+b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}$
7. (スカラー倍との結合法則)　$(ab)\boldsymbol{x} = a(b\boldsymbol{x})$
8. (スカラー倍の単位元)　$1\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

速度や力のように矢印で表すことができるふつうのベクトル (幾何ベクトル) や行列の計算に使うような数を並べたベクトル (数ベクトル) はもちろん以上の公理を満たしている。しかし、上の公理を満たす集合はほかにもたくさんある。例えば座標 x, y, z の関数 $f(x, y, z)$ の微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

と同じ形をした量

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$$

を考える。この量に対する和やスカラー倍は、関数の微分に対して行う和やスカラー倍と同じように定義する。すると、このような量全体が作る集合は上の 8 つの公理をすべて満たすのでベクトル空間になる。

n 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in V$ を考える。これらが

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0} \qquad (a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R})$$

という式を満たすのが、$a_1 = \cdots = a_n = 0$ の場合に限るとき、$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ は 1 次独立であるという。そして、このような 1 次独立なベクトルの最大個数をベクトル空間 V の**次元**といい、$\dim V$ と書く。例えば上の微分量が作るベクトル空間の次元は 3 である。

1.2　外積と 2-ベクトル

n 次元ベクトル空間 V の元の間に新しく外積という演算を定義して、新しいベクトル空間 (2-ベクトル空間) を構成する。

最初に**外積**を定義する。この外積は 3 次元のふつうのベクトル空間の外積 (ベクトル積) を一般化したものである。しかし、ふつうの外積 (ベクトル積) とは完全には同じではないので、記号は $\times$ の替わりに $\wedge$(ウェッジ) を使う。外積は次の 4 つの条件を満たすものとする。

1. $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{x} = 0$
2. $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{x}$
3. $(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) \wedge \boldsymbol{z} = a(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{z}) + b(\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z})$
4. $\boldsymbol{x} \wedge (a\boldsymbol{y} + b\boldsymbol{z}) = a(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) + b(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{z})$

これらの条件はふつうのベクトル積も満たす。しかし、ふつうのベクトル積では $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ もまたベクトルであり、$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ の向きは 2 つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の張る面に直交するという条件がついた。いま考えている一般的な外積では、$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$ が再びベクトルになるという条件ははずしている。つまり $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} \notin V$ である。そこで、このような 2 つのベクトルの外積によって作られた量を集合 V に属するふつうのベクトルと区別して **2-ベクトル**とよぶ。これに対して V に属するふつうのベクトルを 1-ベクトル、スカラーを 0-ベクトルという。

2-ベクトルは、V の中から 2 つの 1-ベクトルを選び外積をとることで作られる。2 つの 1-ベクトルの選び方をいろいろと変えることでいろいろな 2-ベクトルが作れるが、このようないろいろな 2-ベクトル全体からなる集合を 2-ベクトルの空間といい $V \wedge V$ とかく。2-ベクトル空間には、上の分配法則が成り立つような自然な和とスカラー倍が定義されている。そして、この和とスカラー倍のもとで 2-ベクトル空間はベクトル空間になっている。

2-ベクトル空間 $V \wedge V$ の次元を調べよう。1-ベクトル空間の基底を $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ とすると、1-ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ はそれぞれ

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} b_j \boldsymbol{e}_j$$

と展開できる。$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の外積を計算すると

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \boldsymbol{e}_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j (\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j)$$

となる。$\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_i = 0,\ \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = -\boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_i\ (i \neq j)$ を使うと

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = \sum_{i<j} (a_i b_j - a_j b_i)(\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j)$$

となる。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は V の任意の元だから、2-ベクトル空間の任意の元はこの式の形に表せる。したがって、$\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j\ (1 \leq i < j \leq n)$ が $V \wedge V$ の 1 組の基底になっていることがわかる。この $\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j$ の数は

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

であるから、$\dim (V \wedge V) = n(n-1)/2$ となる。

[例]　$\mathbb{R}^n$ における軌道角運動量

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の軌道角運動量 $\boldsymbol{L}$ は、ふつうのベクトルの外積を使って $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ と定義されている。軌道角運動量を一般の次元の空間に拡張したいのだが、3 次元以外の空間では $\times$ を使った外積はうまく定義できない。そこで、一般の次元では軌道角運動量を $\wedge$ を使って定義することにする。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \boldsymbol{e}_j \right) = \sum_{i<j} (x_i p_j - x_j p_i)(\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j) \\
&= \sum_{i<j} L_{ij} (\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j)
\end{aligned}
$$

ここで $L_{ij} = x_i p_j - x_j p_i$ は角運動量の成分みたいなもので、n 次元空間では $n(n-1)/2$ 個存在する。

1.3　p-ベクトル

前の節では 2 つの 1-ベクトルの外積を考えることで 2-ベクトルを作った。同じようにして、p 個の 1-ベクトルの外積を考えることで p-ベクトルというものを作っていこう。

ここまでは 2 つの 1-ベクトルの間にだけ外積を考えてきたが、1-ベクトルが 3 つ以上あるような外積も考えることにする。つまり $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z}$ のようなものも考える。このような 3 つのベクトルの外積に対して、次の結合法則を要請する。

$$
(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) \wedge \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \wedge (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z})
$$

つまり、3 つ以上の外積の計算の結果は計算の順序によらない。この性質はふつうのベクトルの外積にはなかった。ふつうのベクトルの外積では一般に $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ である。p 個の 1-ベクトルの外積とそれらの和からできているようなものを p-**ベクトル**という。そして p-ベクトル全体からなる集合を p-ベクトルの空間といい、$\wedge^p V$ のように書く。この書き方を使うと、$V \wedge V$ は $\wedge^2 V$ のように書ける。また $\wedge^1 V = V,\ \wedge^0 V = \mathbb{R}$ とする。

p-ベクトルに対しても、2-ベクトルと同じような条件が成り立つとする。

1. もし $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_j\ (i \neq j)$ ならば、$\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_p = 0$
2. 分配法則

$$
\begin{aligned}
(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) \wedge \boldsymbol{z}_2 \wedge \boldsymbol{z}_3 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{z}_p &= a(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{z}_2 \wedge \boldsymbol{z}_3 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{z}_p) + b(\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z}_2 \wedge \boldsymbol{z}_3 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{z}_p) \\
\boldsymbol{z}_1 \wedge (a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) \wedge \boldsymbol{z}_3 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{z}_p &= a(\boldsymbol{z}_1 \wedge \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{z}_3 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{z}_p) + b(\boldsymbol{z}_1 \wedge \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z}_3 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{z}_p) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

p-ベクトルの重要な性質として、$\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_p$ の中の任意の 2 つ $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j$ を入れ替えると -1 がかかるというものがある。このことを $p = 5$ の場合に具体的に見てみよう。$\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \boldsymbol{x}_3 \wedge \boldsymbol{x}_4 \wedge \boldsymbol{x}_5$ の $\boldsymbol{x}_2$ と $\boldsymbol{x}_4$ を入れ替えてみる。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \boldsymbol{x}_3 \wedge \boldsymbol{x}_4 \wedge \boldsymbol{x}_5 &= \boldsymbol{x}_1 \wedge (\boldsymbol{x}_2 \wedge \boldsymbol{x}_3) \wedge \boldsymbol{x}_4 \wedge \boldsymbol{x}_5 = -\boldsymbol{x}_1 \wedge (\boldsymbol{x}_3 \wedge \boldsymbol{x}_2) \wedge \boldsymbol{x}_4 \wedge \boldsymbol{x}_5 \\
&= -\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_3 \wedge (\boldsymbol{x}_2 \wedge \boldsymbol{x}_4) \wedge \boldsymbol{x}_5 = \boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_3 \wedge (\boldsymbol{x}_4 \wedge \boldsymbol{x}_2) \wedge \boldsymbol{x}_5 \\
&= \boldsymbol{x}_1 \wedge (\boldsymbol{x}_3 \wedge \boldsymbol{x}_4) \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \boldsymbol{x}_5 = -\boldsymbol{x}_1 \wedge (\boldsymbol{x}_4 \wedge \boldsymbol{x}_3) \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \boldsymbol{x}_5 \\
&= -\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_4 \wedge \boldsymbol{x}_3 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \boldsymbol{x}_5
\end{aligned}
$$

この式を見ると、一般の場合でも任意の 2 つを入れ替えると負号がつくことがわかる。

[例]　フェルミ粒子の波動関数

2 つを入れ替えると符号が変わるという p-ベクトルの性質は、いくつかのフェルミ粒子からなる系の波動関数の性質に似ている。量子力学的な粒子の状態はある種のベクトルとみなすことができるから外積代数の方法が使える。系全体の波動関数が 1 粒子波動関数の積となるような場合を考える。このとき、粒子の入れ替えに対して反対称化した波動関数は外積を使って表すことができる。例えば 3 粒子系の波動関数は

$$(\phi_a \wedge \phi_b \wedge \phi_c)(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)$$

のように表せる。ここで a, b, c は粒子の状態を指定する量子数である。

次に p-ベクトルの空間 $\wedge^p V$ の次元を求めよう。2-ベクトルのときと同じように p-ベクトル空間の基底として

$$\boldsymbol{e}_{h_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{h_p}$$

という形のものがとれる。ただし、$h_1, \ldots, h_p$ は $1, \ldots, n$ のいずれかであり、$i \neq j$ ならば $h_i \neq h_j$ である。(もし $h_i = h_j$ ならば $\boldsymbol{e}_{h_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{h_p}$ は 0 になる。) したがって、$\boldsymbol{e}_{h_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{h_p}$ の数が何個あるかを数えれば $\wedge^p V$ の次元がわかる。基底 $\boldsymbol{e}_{h_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{h_p}$ の数は、1 から n までの数字の中から p 個を選ぶ組み合わせの数に等しいから

$$\dim \wedge^p V = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

となる。特に $\dim \wedge^n V = 1$ である。$p > n$ となるような場合は、基底 $\boldsymbol{e}_{h_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{h_p}$ の添え字がすべて異なるようにすることができない。そのため、$p > n$ の場合は $\boldsymbol{e}_{h_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{h_p}$ はすべて 0 で、$\wedge^p V = \{0\}$ になる。

[例]　$\mathbb{R}^3$ の p-ベクトル

具体的に 3 次元空間で p-ベクトルの見てみよう。まず 0-ベクトルはスカラーであり、その空間の次元は 1 である。また、1-ベクトルはふつうのベクトルで

$$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y + A_z \boldsymbol{e}_z$$

の形に書ける。3 次元空間の 1-ベクトル空間の次元は 3 である。次に 2 ベクトルを考えよう。2-ベクトルは 2 つの 1-ベクトルの外積によって作ることができる。一般の 1-ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積を考えると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} &= (A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y + A_z \boldsymbol{e}_z) \wedge (B_x \boldsymbol{e}_x + B_y \boldsymbol{e}_y + B_z \boldsymbol{e}_z) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y)(\boldsymbol{e}_y \wedge \boldsymbol{e}_z) + (A_z B_x - A_x B_z)(\boldsymbol{e}_z \wedge \boldsymbol{e}_x) + (A_x B_y - A_y B_x)(\boldsymbol{e}_x \wedge \boldsymbol{e}_y) \qquad (1)\end{aligned}$$

のようになるから、2-ベクトルは一般に

$$\boldsymbol{C} = C_x \boldsymbol{e}_y \wedge \boldsymbol{e}_z + C_y \boldsymbol{e}_z \wedge \boldsymbol{e}_x + C_z \boldsymbol{e}_x \wedge \boldsymbol{e}_y$$

という形に書ける。2-ベクトル空間の次元は基底の数から明らかなように 3 である。最後に 3-ベクトルを考えよう。(3 次元空間では 4-ベクトル以上の p-ベクトルは存在しない。) 1-ベクトル $\boldsymbol{A}$ と 2-ベクトル $\boldsymbol{B}$ の外積をとる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} &= (A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y + A_z \boldsymbol{e}_z) \wedge (B_x \boldsymbol{e}_y \wedge \boldsymbol{e}_z + B_y \boldsymbol{e}_z \wedge \boldsymbol{e}_x + B_z \boldsymbol{e}_x \wedge \boldsymbol{e}_y) \\ &= (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \boldsymbol{e}_x \wedge \boldsymbol{e}_y \wedge \boldsymbol{e}_z \qquad (2)\end{aligned}$$

この式から、一般の 3-ベクトルが $C\boldsymbol{e}_x \wedge \boldsymbol{e}_y \wedge \boldsymbol{e}_z$ という形に書けることがわかる。3 ベクトル空間の次元は 1 である。

今求めた 2 つの式 (1) と (2) を見るとおもしろいことがわかる。まず式 (1) を見てみよう。この式はふつうのベクトルの外積の式にとてもよく似ている。$\boldsymbol{e}_y \wedge \boldsymbol{e}_z \to \boldsymbol{e}_x$ などの置き換えをすれば、ほとんどふつうのベクトル積と同じになる。また $A_y B_z - A_z B_y$ などの量が、座標系の回転に関してふつうのベクトルの成分と同じように変換することを示すことができる。したがって $\mathbb{R}^3$ では 2 つの 1-ベクトルの外積から作った 2 ベクトルはほとんどふつうのベクトルと同じになる。しかし、座標系の反転に対する変換性はふつうのベクトルと異なる。座標系を反転すると、$\boldsymbol{e}_x \to -\boldsymbol{e}_x$ のように基底ベクトルに負号がつくからベクトル全体にも負号がつく。一方、2-ベクトルでは符号は変化しない。このことは

$$\boldsymbol{e}_y \wedge \boldsymbol{e}_z \to (-\boldsymbol{e}_y) \wedge (-\boldsymbol{e}_z) = \boldsymbol{e}_y \wedge \boldsymbol{e}_z$$

となることからわかる。したがって、2-ベクトルは擬ベクトル (軸性ベクトル) に対応している。

次に式 (2) を見てみよう。この式はベクトルの内積にとてもよく似ている。したがって、3 次元空間の 1-ベクトルと 2-ベクトルの外積は、ふつうのベクトルの内積に対応していると考えられる。また、3-ベクトルの成分の数は 1 個だから、同じく成分が 1 個のスカラー (0-ベクトル) のようにみることができる。これは 2-ベクトルを 1-ベクトルのようにみなせたことに対応している。ただし、3-ベクトルは座標系の反転に対する変換性がスカラーと異なっている。座標系を反転させると 3-ベクトルの符号も変わるので、3-ベクトルは擬スカラーに対応している。

2 微分形式

2.1 外微分形式

1.1 節で見たように、関数の微分のような量からなる集合はベクトル空間になる。したがって、ここまで述べてきた外積代数の方法を使うことができる。ここでは関数の微分のような量に外積の演算を行う。

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を考える。まず、1-ベクトルに対応する量として

$$\sum_{i=1}^{n} a_i dx_i$$

というものを考える。これを 1 **次外微分形式**、略して 1-**形式**という。ここで各 a_i は $x_1, \ldots, x_n$ の滑らかな関数であるとする。前にも述べたように 1-形式はベクトル空間になっているから、外積によって p-ベクトルに対応するものを作ることができる。例えば、2 つの 1-ベクトルの外積を考えると

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i dx_i\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} b_j dx_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j dx_i \wedge dx_j$$

のような、2 **次外微分形式** (2-**形式**) を作ることができる。一般に p **次外微分形式** (p-**形式**) は

$$\sum_{h_1=1}^{n} \cdots \sum_{h_p=1}^{n} a_{h_1 \ldots h_p} dx_{h_1} \wedge \cdots \wedge dx_{h_p}$$

のようなものになる。ただし、$x_1, \ldots, x_n$ の滑らかな関数を 0-形式とする。これらの微分形式は外積代数の規則 (分配法則や結合法則) に従うものとする。

[例]　$\mathbb{R}^3$ の微分形式

3 次元ユークリッド空間には 0-形式から 3-形式までの 4 つの微分形式がある。

- 0-形式　関数 $f(x,y,z)$
- 1-形式　$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$
- 2-形式　$\alpha = Ady\wedge dz + Bdz\wedge dx + Cdx\wedge dy$
- 3-形式　$\beta = Fdx\wedge dy\wedge dz$

多くの場合 dx, dy, dz を $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ のように思っても問題ない。したがって $\mathbb{R}^3$ では、1-形式はベクトル場、2-形式は擬ベクトルの場を表していると解釈できる。

p-形式 λ と q-形式 μ を

$$\lambda = \sum_{g_1=1}^{n}\cdots\sum_{g_p=1}^{n} a_{g_1\ldots g_p} dx_{g_1}\wedge\cdots\wedge dx_{g_p}, \qquad \mu = \sum_{h_1=1}^{n}\cdots\sum_{h_q=1}^{n} b_{h_1\ldots h_q} dx_{h_1}\wedge\cdots\wedge dx_{h_q}$$

とおくと、これらの外積 $\lambda\wedge\mu$ は

$$\lambda\wedge\mu = \sum_{g_1\ldots g_p}\sum_{h_1\ldots h_q} a_{g_1\ldots g_p} b_{h_1\ldots h_q}(dx_{g_1}\wedge\cdots\wedge dx_{g_p}\wedge dx_{h_1}\wedge\cdots\wedge dx_{h_q})$$

のような (p+q)-形式になる。もし $p+q>n$ ならば $\lambda\wedge\mu = 0$ である。

2.2　外微分

微分形式に**外微分**という新しい演算を導入する。外微分作用素の記号には微分と同じ d を使う。この外微分という演算は、p-形式を (p+1)-形式に変える (つまり dx_i の数が 1 つ増える) 演算で、ふつうの関数の全微分にとてもよく似ている。外微分を次の 3 つの性質によって定義する。

1. 線形写像である。つまり、$d(a\lambda + b\mu) = a(d\lambda) + b(d\mu)$ が成り立つ。
2. ふつうの関数 f に対しては全微分と同じように作用する。

$$df = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$$

3. 一般の微分形式 $\lambda = \sum a_{h_1\ldots h_p} dx_{h_1}\wedge\cdots\wedge dx_{h_p}$ に対しては

$$\begin{aligned} d\lambda &= \sum_{h_1\ldots h_p}(da_{h_1\ldots h_p})\wedge dx_{h_1}\wedge\cdots\wedge dx_{h_p} \\ &= \sum_{h_1\ldots h_p}\sum_{i}\frac{\partial a_{h_1\ldots h_p}}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_{h_1}\wedge\cdots\wedge dx_{h_p}\end{aligned}$$

のように作用する。

[例]　外微分と勾配、回転、発散

具体的に $\mathbb{R}^3$ 上の微分形式の外微分をとってみよう。0-形式、つまりふつうの関数 f に対しては、定義をそのままあてはめればよく

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{3}$$

となる。次に、1-形式 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ の外微分をとってみる。

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right) \wedge dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right) \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy \qquad (4) \end{aligned}$$

同様にして 2-形式 $\alpha = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy$ の外微分を計算すると

$$\begin{aligned} d\alpha &= dA \wedge dy \wedge dz + dB \wedge dz \wedge dx + dC \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy + \frac{\partial A}{\partial z}dz\right) \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial B}{\partial x}dx + \frac{\partial B}{\partial y}dy + \frac{\partial B}{\partial z}dz\right) \wedge dz \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial C}{\partial x}dx + \frac{\partial C}{\partial y}dy + \frac{\partial C}{\partial z}dz\right) \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz \qquad (5) \end{aligned}$$

となる。3-形式 $\beta = Fdx \wedge dy \wedge dz$ の外微分をとると 4-形式になるが、3 次元空間では 4-形式は恒等的に 0 である。実際

$$d\beta = dF \wedge dx \wedge dy \wedge dz = \left(\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz\right) \wedge dx \wedge dy \wedge dz = 0$$

となる。

今求めた 3 つの式 (3)∼(5) は、それぞれベクトル解析の勾配、回転、発散によく似ている。式 (3) は関数 f の勾配、式 (4) はベクトル $\boldsymbol{V} = (P, Q, R)$ の回転、式 (5) はベクトル $\boldsymbol{W} = (A, B, C)$ の発散を表している。外微分はベクトル解析の演算を含んでいる。

2.3 ポアンカレの補題

外微分の演算を続けて 2 回行うとどうなるかを調べよう。ためしに式 (3) で求めた df の外微分をとってみる。

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \wedge dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \wedge dy + d\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}dz\right) \wedge dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz\right) \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) dx \wedge dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって、任意の関数 f に対して $d(df)$ は恒等的に 0 となる。これは $\nabla\times(\nabla f)=0$ に対応している。次に式 (4) の外微分をとってみる。

$$
\begin{aligned}
d(d\omega) &= d\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\wedge dy\wedge dz + d\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\wedge dz\wedge dx + d\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\wedge dx\wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x}\right)dy\wedge dz\wedge dx \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}\right)dz\wedge dx\wedge dy \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって、これも 0 になる。これは任意のベクトル $\boldsymbol{V}$ に対して $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{V})=0$ となることに対応する。式 (5) の外微分をとると 4-形式になるから、$d(d\alpha)=0$ も成り立つ。一般に、任意の微分形式 λ に対して、$d(d\lambda)=0$ が言える。このことは次のようにして示せる。$\lambda=\sum a_{h_1\ldots h_p}dx_{h_1}\wedge\cdots\wedge dx_{h_p}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
d(d\lambda) &= d\left(\sum_{h_1\ldots h_p}\sum_i \frac{\partial a_{h_1\ldots h_p}}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_{h_1}\wedge\cdots\wedge dx_{h_p}\right) \\
&= \sum_{h_1\ldots h_p}\sum_i\sum_j \frac{\partial^2 a_{h_1\ldots h_p}}{\partial x_j\partial x_i}dx_j\wedge dx_i\wedge dx_{h_1}\wedge\cdots\wedge dx_{h_p} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{h_1\ldots h_p}\sum_i\sum_j \frac{\partial^2 a_{h_1\ldots h_p}}{\partial x_j\partial x_i}dx_j\wedge dx_i\wedge dx_{h_1}\wedge\cdots\wedge dx_{h_p} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{h_1\ldots h_p}\sum_j\sum_i \frac{\partial^2 a_{h_1\ldots h_p}}{\partial x_i\partial x_j}dx_i\wedge dx_j\wedge dx_{h_1}\wedge\cdots\wedge dx_{h_p} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{h_1\ldots h_p}\sum_i\sum_j \frac{\partial^2 a_{h_1\ldots h_p}}{\partial x_j\partial x_i}dx_j\wedge dx_i\wedge dx_{h_1}\wedge\cdots\wedge dx_{h_p} \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_{h_1\ldots h_p}\sum_i\sum_j \frac{\partial^2 a_{h_1\ldots h_p}}{\partial x_j\partial x_i}dx_j\wedge dx_i\wedge dx_{h_1}\wedge\cdots\wedge dx_{h_p} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって、$d(d\lambda)=0$ が成り立つ。この 2 回外微分をとると 0 になるという性質は**ポアンカレの補題**と呼ばれている。この性質は結局、2 階偏導関数が偏微分の順序によらないということからきている。

[例]　マクスウェルの関係式

熱力学にマクスウェルの関係式と呼ばれる一連の関係式がある。この式を微分形式を使って導いてみよう。熱力学に現れる式に、$dU=TdS-PdV$ というものがある。T や P を S,V の関数だと思ってこの式の両辺の外微分をとってみると

$$
\begin{aligned}
0=d(dU) &= dT(S,V)\wedge dS - dP(S,V)\wedge dV \\
&= \left(\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S dV\right)\wedge dS - \left(\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S dV\right)\wedge dV \\
&= \left(\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S + \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V\right)dV\wedge dS
\end{aligned}
$$

となる。よって、マクスウェルの関係式の 1 つ

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V$$

が得られる。

3　星印作用素

3.1　p-ベクトルの内積

再び一般の外積代数にもどる。ここでは、ベクトル空間 V で定義された内積を利用して一般の p-ベクトルにも内積を定義する。次の形の 2 つの p-ベクトル、$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_p$ と $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{y}_p$ の内積 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ を次のように定義する。

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1) & (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_2) & \ldots & (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_p) \\ (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1) & (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2) & \ldots & (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{y}_1) & (\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{y}_2) & \ldots & (\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{y}_p) \end{vmatrix}$$

$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_j)$ は、ふつうのベクトルの内積でスカラーである。したがって、これらを成分とする行列の行列式から作った p-ベクトルの内積もスカラーになる。また、内積は各変数について線形であるとする。つまり、p-ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対して

$$(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \qquad (\boldsymbol{u}, a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}) = a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$$

が成り立つ。これを使えば一般の p-ベクトルの内積が計算できる。p-ベクトル $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_p$ のような形に表す方法はいろいろあるが、上のように定義した内積はその表し方によらないことを示せる。また、この内積は対称性 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ も満たしている。これは次のようにして示せる。$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_p$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{y}_p$ とおくと

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) &= \begin{vmatrix} (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2) & \ldots & (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_p) \\ (\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{x}_2) & \ldots & (\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{x}_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{y}_p, \boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{y}_p, \boldsymbol{x}_2) & \ldots & (\boldsymbol{y}_p, \boldsymbol{x}_p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1) & (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1) & \ldots & (\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{y}_1) \\ (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_2) & (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2) & \ldots & (\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{y}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_p) & (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_p) & \ldots & (\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{y}_p) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1) & (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_2) & \ldots & (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_p) \\ (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1) & (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2) & \ldots & (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{y}_1) & (\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{y}_1) & \ldots & (\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{y}_p) \end{vmatrix} \\ &= (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\end{aligned}$$

ここで、行列の転置をとっても行列式の値は変わらないという性質を使った。

[例]　$\mathbb{R}^3$ 上の微分形式の内積

$\mathbb{R}^3$ 上の微分形式を考える。基底 dx, dy, dz はそれぞれふつうのベクトルの基底 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ に対応しているので、1-形式の内積を

$$(dx_i,\, dx_j) = \delta_{ij}$$

によって定義する。ただし、$dx_1 = dx,\ dx_2 = dy,\ dx_3 = dz$ とおいた。このとき、2-形式や 3-形式の内積がどうなるか見てみよう。2-形式、$adx_1 \wedge dx_2$ と $bdx_1 \wedge dx_2$ の内積は定義より

$$\begin{aligned}(adx_1 \wedge dx_2,\, bdx_1 \wedge dx_2) &= ab\,(dx_1 \wedge dx_2,\, dx_1 \wedge dx_2) \\ &= ab\begin{vmatrix}(dx_1,\, dx_1) & (dx_1,\, dx_2) \\ (dx_2,\, dx_1) & (dx_2,\, dx_2)\end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{vmatrix} \\ &= ab\end{aligned}$$

となる。一方、$adx_1 \wedge dx_2$ と $bdx_2 \wedge dx_3$ の内積は

$$\begin{aligned}(adx_1 \wedge dx_2,\, bdx_2 \wedge dx_3) &= ab\begin{vmatrix}(dx_1,\, dx_2) & (dx_1,\, dx_3) \\ (dx_2,\, dx_2) & (dx_2,\, dx_3)\end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0\end{vmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$

のように 0 である。これらの計算を見るとわかるように、内積が 0 にならないのは 2 つの 2-形式の基底が同じになっているときだけである。つまり、計算は面倒だが結果はふつうのベクトルの内積とあまり変わらない。同様にして 3-形式同士の内積を求めてみよう。

$$\begin{aligned}(adx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,\, bdx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) &= ab\begin{vmatrix}(dx_1,\, dx_1) & (dx_1,\, dx_2) & (dx_1,\, dx_3) \\ (dx_2,\, dx_1) & (dx_2,\, dx_2) & (dx_2,\, dx_3) \\ (dx_3,\, dx_1) & (dx_3,\, dx_2) & (dx_3,\, dx_3)\end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} \\ &= ab\end{aligned}$$

3.2 星印作用素

前に見たように、$\mathbb{R}^3$ では 1-ベクトルと 2-ベクトルの空間の次元は同じで、どちらも 3 次元のベクトル空間になる。また、0-ベクトルと 3-ベクトルの空間の次元も 1 次元で同じになる。一般に、$\mathbb{R}^n$ では p-ベクトルの空間と $(n-p)$-ベクトルの空間の次元は同じになることがわかる。そのため、p-ベクトルと $(n-p)$-ベクトルを関係づけたくなる。p-ベクトルを $(n-p)$-ベクトルに写す作用素としてホッジの**星印作用素**というものがある。

星印作用素の作用は内積や空間の向きによって変化する。そこで、まず空間の向きについて説明する。n 次元ベクトル空間の向きは、n 個の基底 $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ の外積によって作られる n-ベクトルに基準となるものを 1 つ定めることによって決まる。例として 3 次元空間を考える。この空間の基底を $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ とすると 3-ベクトルの基底には、$\boldsymbol{e}_x \wedge \boldsymbol{e}_y \wedge \boldsymbol{e}_z$ や $\boldsymbol{e}_y \wedge \boldsymbol{e}_x \wedge \boldsymbol{e}_z$ など 6 通りが考えられる。空間に向きをつけるためには、そのうちの 1 つを基準として選ぶ。そして n-ベクトルを考えるときはいつもその順番に基底を並べる。例えば $\boldsymbol{e}_x \wedge \boldsymbol{e}_y \wedge \boldsymbol{e}_z$ を基準にしたら、$\boldsymbol{e}_y \wedge \boldsymbol{e}_x \wedge \boldsymbol{e}_z$ は並べ替えによって $-\boldsymbol{e}_x \wedge \boldsymbol{e}_y \wedge \boldsymbol{e}_z$ と書くようにする。

以下では向きのついたベクトル空間を扱うことにし、$\boldsymbol{e}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n$ のように添え字と同じ順番に並んだ n-ベクトルを基準にする。また $\boldsymbol{e}^{(n)} = \boldsymbol{e}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n$ とおく。

p-ベクトルを $(n-p)$-ベクトルに写す作用素 $*$ の p-ベクトル $\boldsymbol{u}$ に対する作用を次のように定義する。

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = (*\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{e}^{(n)}$$

ここで、$\boldsymbol{v}$ は任意の $(n-p)$-ベクトルである。つまり $*$ を p-ベクトル $\boldsymbol{u}$ に作用させると、この式を満たすような $(n-p)$-ベクトル $*\boldsymbol{u}$ になる。実はこのような $*\boldsymbol{u}$ が一意的に存在することを示すことができる。

上の式では $\boldsymbol{v}$ を任意の $(n-p)$-ベクトルとしているが、実際に $*\boldsymbol{u}$ を求める場合は、$\boldsymbol{v}$ を $(n-p)$-ベクトルの基底 $\boldsymbol{e}_{h_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{h_{n-p}}$ として考えれば十分である。なぜならば、任意の $(n-p)$-ベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v}=\sum_{h_1\ldots h_{n-p}} a_{h_1\ldots h_{n-p}}\boldsymbol{e}_{h_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{h_{n-p}}$$

という形に書けるが、これを定義式 $\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}=(*\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\boldsymbol{e}^{(n)}$ に代入すると

$$\sum_{h_1\ldots h_{n-p}} a_{h_1\ldots h_{n-p}}\left\{\boldsymbol{u}\wedge(\boldsymbol{e}_{h_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{h_{n-p}})\right\}=\sum_{h_1\ldots h_{n-p}} a_{h_1\ldots h_{n-p}}\left\{(*\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{e}_{h_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{h_{n-p}})\boldsymbol{e}^{(n)}\right\}$$

となるから、基底に対して $*\boldsymbol{u}$ が条件の式を満たせば任意の $(n-p)$-ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対しても条件式を満たすことになる。

実際に微分形式に星印作用素を作用させてみよう。$\mathbb{R}^3$ 上の微分形式を考える。内積は前と同じように $(dx_i,dx_j)=\delta_{ij}$ で定める。また、$dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$ という 3-形式で空間の向きを定める。このとき $*dx_1$ は

$$dx_1\wedge\lambda=(*dx_1,\lambda)\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$$

を満たす 2-形式である。λ は任意の 2-形式であるが、$\lambda=dx_i\wedge dx_j$ という形のものだけを考えれば十分である。この形を仮定すると、上の式で左辺が 0 とならないのは $\lambda=dx_2\wedge dx_3$ の場合だけになる。これを代入すると

$$dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3=(*dx_1,\,dx_2\wedge dx_3)\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$$

となる。この式が成り立つためには $(*dx_1,\,dx_2\wedge dx_3)=1$ となればよいが、内積が 0 にならないのは $*dx_1=c\,dx_2\wedge dx_3$ という形のときだけである。$(dx_2\wedge dx_3,\,dx_2\wedge dx_3)=1$ から $c=1$ がわかり、結局

$$*dx_1=dx_2\wedge dx_3 \tag{6}$$

となる。同様にして

$$*dx_2=dx_3\wedge dx_1,\qquad *dx_3=dx_1\wedge dx_2 \tag{7}$$

も確かめられる。今度は 1-形式 $*(dx_2\wedge dx_3)$ を求めよう。定義式より

$$(dx_2\wedge dx_3)\wedge\lambda=(*(dx_2\wedge dx_3),\,\lambda)\;dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$$

となるが、$\lambda=dx_1$ の場合だけ左辺は 0 にならない。そこで $\lambda=dx_1$ を代入すると

$$dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3=(*(dx_2\wedge dx_3),\,dx_1)\;dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$$

となる。あとは、右辺の内積が 1 になるように $*(dx_2\wedge dx_3)$ を定めればよいが、これが成り立つのは明らかに $*(dx_2\wedge dx_3)=dx_1$ のときである。よって

$$*(dx_2\wedge dx_3)=dx_1$$

同様の計算で

$$*(dx_3\wedge dx_1)=dx_2,\qquad *(dx_1\wedge dx_2)=dx_3$$

もわかる。$*(dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3)$ は 0-形式 (スカラー) になるから、簡単な計算により

$$*(dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3)=1 \tag{8}$$

が確かめられる。

[例]　ラプラシアン

関数 $f(x_1, x_2, x_3)$ に対して、$*d*df$ という量を考えてみよう。df は

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3$$

となるから、式 (6), (7) を使えば $*df$ は

$$*df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_1 \wedge dx_2$$

となる。さらに外微分をとる。

$$d*df = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

よって、式 (8) を用いれば

$$*d*df = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2}$$

となるので、$*d*d$ がラプラシアンに一致することがわかる。

3.3　マクスウェル方程式

真空中でのマクスウェル方程式は次のように書くことができる。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{10}$$

ここで $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ は電場、$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ は磁束密度である。これら 4 つの式の左辺には ∇ が出てくるが、前にも見たように微分形式では ∇ は外微分作用素 d に対応する。それゆえ、マクスウェル方程式は微分形式を使って表せそうである。しかし、マクスウェル方程式では空間座標に関する微分のほかに時間微分がある。そのため空間座標と時間座標をまとめて考えたほうが便利なので、ここではユークリッド空間ではなくミンコフスキー空間で考える。ミンコフスキー空間は 4 つの変数 (x_0, x_1, x_2, x_3) を使って記述できる。ただし、$x_0 = ct$ である。ミンコフスキー空間になっても微分形式の方法は 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ と変わらないが、内積は少し変わる。ミンコフスキー空間では内積を次のように定義する。

$$(dx_0, dx_0) = -1, \quad (dx_0, dx_i) = 0, \quad (dx_i, dx_j) = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

また、この先で星印作用素を使うので空間の向きも決めておく。空間の向きを

$$dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

で定める。このとき、$dx_\mu \wedge dx_\nu$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ に対する $*$ の作用は

$$\begin{aligned}
&*(dx_1 \wedge dx_0) = -dx_2 \wedge dx_3, \qquad *(dx_2 \wedge dx_0) = -dx_3 \wedge dx_1, \qquad *(dx_3 \wedge dx_0) = -dx_1 \wedge dx_2, \\
&*(dx_2 \wedge dx_3) = dx_1 \wedge dx_0, \qquad *(dx_3 \wedge dx_1) = dx_2 \wedge dx_0, \qquad *(dx_1 \wedge dx_2) = dx_3 \wedge dx_0
\end{aligned}$$

のようになる。これらの計算は $(dx_0, dx_0) = -1$ に注意すれば $\mathbb{R}^3$ のときと同じである。

これで準備が調ったのでマクスウェル方程式 (9), (10) を微分形式で表してみよう。結果は次のようになる。

$$df = 0 \tag{11}$$

$$d{*}f = \mu_0 j \tag{12}$$

ここで f は、電磁場テンソル

$$(f_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

から作った 2-形式で

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=0}^{3} f_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu \\ &= \frac{E_1}{c}\, dx_1 \wedge dx_0 + \frac{E_2}{c}\, dx_2 \wedge dx_0 + \frac{E_3}{c}\, dx_3 \wedge dx_0 \\ &\quad + B_1\, dx_2 \wedge dx_3 + B_2\, dx_3 \wedge dx_1 + B_3\, dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

である。また j は四元電流密度 $(c\rho, \boldsymbol{i})$ から作った次のような 3-形式である。

$$j = -c\rho\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + i_1\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_0 + i_2\, dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_0 + i_3\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_0$$

式 (11), (12) が実際にマクスウェル方程式に一致することを確かめよう。まず、(11) を確かめる。2-形式 f を外微分すると

$$\begin{aligned} df = &\left(\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{1}{c}\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_2}{\partial x_3} + \frac{\partial B_1}{\partial x_0}\right) dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_0 \\ &+ \left(\frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_3}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_0}\right) dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_0 + \left(\frac{1}{c}\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_0}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_0 \end{aligned}$$

となる。$dx_\lambda \wedge dx_\mu \wedge dx_\nu$ はベクトル空間の基底だから、$df = 0$ ならばこの式の各係数は 0 になる。したがって $df = 0$ は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \qquad \frac{1}{c}\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x_0} = 0$$

と同値である。よって $x_0 = ct$ に注意すれば、これらの式がマクスウェル方程式 (9) に一致することがわかる。次に (12) を確かめよう。${*}f$ を計算すると

$${*}f = -\frac{E_1}{c}\, dx_2 \wedge dx_3 - \frac{E_2}{c}\, dx_3 \wedge dx_1 - \frac{E_3}{c}\, dx_1 \wedge dx_2 + B_1\, dx_1 \wedge dx_0 + B_2\, dx_2 \wedge dx_0 + B_3\, dx_3 \wedge dx_0$$

となるから、$d{*}f$ は

$$\begin{aligned} d{*}f = &\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{\partial x_1} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_2}{\partial x_2} - \frac{\partial E_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{\partial x_0} + \frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_0 \\ &+ \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial E_2}{\partial x_0} + \frac{\partial B_1}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_0 + \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial E_3}{\partial x_0} + \frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_0 \end{aligned}$$

になる。したがって式 (12)、$d{*}f = \mu_0 j$ は

$$-\frac{1}{c}\nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\mu_0\, c\rho, \qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x_0} + \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{i}$$

と同値である。よって $c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$ を使えば、これらの式がマクスウェル方程式 (10) に一致することがわかる。

電荷保存則　式 (12) の両辺の外微分をとってみる。2 回外微分すると 0 になるという性質 (ポアンカレの補題) から、式 (12) の左辺は 0 になるので $dj = 0$ となることがわかる。つまり

$$0 = dj = \left(-c\frac{\partial \rho}{\partial x_0} - \frac{\partial i_1}{\partial x_1} - \frac{\partial i_2}{\partial x_2} - \frac{\partial i_3}{\partial x_3}\right) dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

である。$dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ は 0 ではないので、この等式が成り立つためには ( ) の中の式が 0 にならないといけない。したがって

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{i} = 0$$

が成り立つ。これは電荷保存則を表す式である。

電磁ポテンシャル　式 (11) を見るとわかるように、2-形式 f の外微分をとると 0 になる。このことから f は、ある 1-形式 g を使って $f = dg$ の形に表せそうである。なぜならば、$f = dg$ のときポアンカレの補題から $df = d(dg) = 0$ が恒等的に成り立つからである。実際、ある条件のもとで次の命題が成り立つ。

“$d\mu = 0$ を満足する p-形式 μ は、ある $(p-1)$-形式 λ を使って $\mu = d\lambda$ と表すことができる。”

この命題は**ポアンカレの補題の逆**と呼ばれている。したがって、ポアンカレの補題の逆が成り立つとすれば f は $f = dg$ という形に書くことができる。このような 1-形式 g を

$$g = -\frac{\phi}{c} dx_0 + A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3$$

の形におく。この g の外微分をとると

$$\begin{aligned} dg = &\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_0}\right) dx_1 \wedge dx_0 + \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_0}\right) dx_2 \wedge dx_0 + \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_0}\right) dx_3 \wedge dx_0 \\ &+ \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

となる。これが 2-形式 f に等しいとしているから、この式を f と比べて

$$-\frac{1}{c}\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_0} = \frac{\boldsymbol{E}}{c}, \qquad \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

がわかる。電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ は、スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を使って

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

と書けるから、1-形式 g がうまく電磁ポテンシャルを表していることがわかる。