フェイザ，直列共振，○○変換など

Phasors, Series Resonance, Some Transforms, and Others

H. Kikuchi

Niigata University

2017/11/6

1　Phasor の定義

定義　振幅 1, 角周波数 ω の正弦波 $e^{j\omega t}$ **を基準として** [1] 正弦波 $a(t) = A_0 e^{j(\omega t+\theta)}$ のフェイザ A を

$$A = a(t)/e^{j\omega t} \tag{1}$$

と定義する．したがって，$A = A_0 e^{j\theta}$.

1.1　補題

フェイザとは正弦波のフーリエ変換である．

証明　$a(t)$ のフーリエ変換 [2] は

$$\begin{aligned}\left\langle e^{j\Omega t}, a(t)\right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega t} a(t) dt \\ &= A_0 e^{j\theta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\Omega-\omega)t} dt \\ &= A_0 e^{j\theta} 2\pi\delta(\Omega-\omega).\end{aligned}$$

$2\pi\delta(\Omega-\omega)$ を除けば，$a(t)$ のフーリエ変換とフェイザは同一である.（証明終）

1.2　解説

このように，フェイザ A は $A(\Omega)$ あるいは $A(\omega)$ とでも書くべき周波数領域表現であり，時間領域表現 $a(t)$ と 1 対 1 に対応しています．$\Omega = (-\infty, \infty)$ における表現であり，その中の 1 点 $\Omega = \omega$ の周波数成分しか保有しません．それが証拠に，フェイザ表示の回路方程式 $E = ZI$ を解いて，$I = \frac{E}{Z}$ と求めたときの電流フェイザには露骨にその周波数が登場します．インピーダンスが $Z(\omega) = R + j\omega L$ であったりしますからね.

効用　この補題によってフェイザの意味を正しく理解し，フェイザの使い方や複素電力にまつわる疑問のいくつかを解消できると思います.

Q． フーリエ変換は周波数の関数であるはずだが，フェイザは単なる複素数ではないか？

A． ちゃんと周波数の関数なのです．だから，いつもそれを忘れないように,「$e^{j\omega t}$ を基準とする」ことを私は明記するのです．フェイザは $\delta(\Omega-\omega)$ という単一周波数成分の強さを表わしているのです.（複素数ですから，正確に言えば，強さ＝振幅と位相という意味です.）$\delta(\cdot)$ はデルタ関数であり，$\Omega = \omega$ のときだけ値をもつことから，ω の関数といっても差し支えありません.

逆にお訊ねしますが, 先ほど解説で登場した電流フェイザは $I = \frac{E}{R+j\omega L}$ となりますが，あなたはこれを ω の関数ではないと言うのですか.

[1] 交流電力の計算に際しては，$\sqrt{2}e^{j\omega t}$ を基準とする実効値フェイザを使う．混乱を避けるため，ここでのフェイザを波高値フェイザとよぶことがある.

[2] x と y の内積を $\langle x, y\rangle$ とかく.

2　RLC 直列共振回路の定常応答

2.1　問題

抵抗 R，コイル L，キャパシタ C の直列接続による 2 端子インピーダンス Z を交流電圧源 $e(t) = E_0 e^{j\omega t}$ で駆動する．回路に流れる電流を $i(t) = I_0 e^{j(\omega t+\theta)}$ とかくとき，以下の設問に答えなさい. [3]

1. 回路図を描きなさい.
2. Z をかきなさい.
3. この回路に成立する方程式をフェイザでかきなさい．それを解いて，電流 $i(t)$ のフェイザを求めなさい.
4. 抵抗，コイル，キャパシタ，それぞれの両端に発生する電圧降下のフェイザ V_R, V_L, V_C を求め，図示しなさい.
5. 電流の大きさが最大となる角周波数 ω_0 を答えなさい．また，この周波数を何と呼ぶか.
6. 電流振幅の周波数特性を図示しなさい.
7. 電流の 2 乗振幅が最大値の半分になる角周波数 ω_1，ω_2 を求めなさい．ただし，$0 < \omega_1 < \omega_2$ とする.
8. 半値帯域幅 $\omega_2 - \omega_1$ を求めなさい.
9. $\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$ が成立することを確認しなさい.
10. L, C を使わずに，ω_0 と $\omega_2 - \omega_1$ をつかって Z を書き表しなさい.（ヒント： ω を $\dfrac{\omega}{\omega_0}$ の形にまとめる）

[3] 設問 7 以降は，本質をより深く理解し，一般的な見通しを獲得するための問題です．少し高度な内容です．しかし初心者であっても，答えられないほど難しいわけではありません.

11. Quality factor を $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$ と定義し，Z を書き換えなさい．また，Q を R, L, C をつかって表わしなさい．
12. $s = j\omega$ とおいて Z を s の関数 $Z(s)$ としてかきなさい．
13. 回路が共振しているとき，V_L, V_C を求めなさい．
14. リアクタンス部 $X(\omega) = \mathrm{Im}[Z(\omega)]$ の周波数特性を図示しなさい．

2.2　解答

2.2.1　前半部の答え

1. Fig. 1 のとおり．
2. $Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$.
3. $e(t) = Ri(t) + L\frac{d}{dt}i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$.
   この方程式を，$e^{j\omega t}$ を基準としてフェイザで表示する．つまり，$I = I_0 e^{j\theta}$ とかけば，
   $E_0 = ZI$. すなわち，$I = \frac{E_0}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$.
   $$\therefore \quad I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}},$$
   $$\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right).$$
   θ のマイナスが分からない人は第 2.3 節「複素数の計算」を参照してください．
4. $V_R = RI$,
   $V_L = j\omega LI = \omega LIe^{j\frac{\pi}{2}}$,
   $V_C = \frac{1}{j\omega C}I = \frac{I}{\omega C}e^{-j\frac{\pi}{2}}$.
   思い出してください: $E = E_0 e^{j\omega t}$ の位相，つまり $e^{j\omega t}$ を基準としたことを．それぞれのフェイザを描くと Fig. 2 のとおり．I は E より $|\theta|$ だけ遅れている．V_R は I と同位相である．I に比べて，V_L は $\frac{\pi}{2}$ だけ進んでおり，V_C は $\frac{\pi}{2}$ だけ遅れている．V_L と V_C の和（つまり $V_L + V_C$）と V_R の和が E にほかならない．
5. $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ のとき，I_0 は最大となる．すなわち，$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. ω_0 を共振角周波数という．
6. $I_0(\omega)$ の ω に対する変化を点検してみると，
   $I_0(0) = 0$, $I_0(\omega_0) = \frac{E_0}{R}$, $I_0(\infty) = 0$.
   $I_0(\omega)$ は上に凸の単峰 (single-peak) 曲線となる．

2.2.2　後半部の答え

ここからは回路網理論の根幹概念を学習することになります．

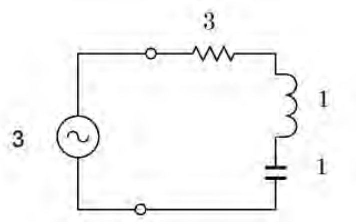

Figure 1: The RLC series resonance circuit.

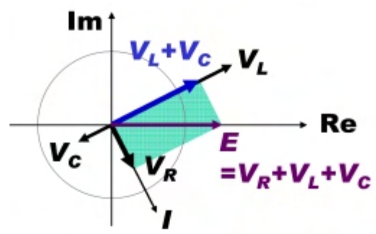

Figure 2: Relevant phasors such as V_R, V_L, and V_C.

7. 2 乗振幅 $I_0^2(\omega)$ がその最大値の半分になるのは $R^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$ のときである．つまり，
   $R = \pm\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$.
   これより，2 本の 2 次方程式
   $$\omega^2 LC - \omega CR - 1 = 0,$$
   $$\omega^2 LC + \omega CR - 1 = 0$$
   が得られる．これを解いて，
   $$\omega_2 = \frac{CR + \sqrt{C^2R^2 + 4LC}}{2LC},$$
   $$\omega_1 = \frac{-CR + \sqrt{C^2R^2 + 4LC}}{2LC}$$
   を得る．
8. 半値帯域幅は $\omega_2 - \omega_1 = \dfrac{R}{L}$.
9. $\omega_1\omega_2 = \dfrac{C^2R^2 + 4LC - C^2R^2}{4L^2C^2} = \dfrac{1}{LC} = \omega_0^2$.
   ω_0 は ω_1, ω_2 の幾何平均 (geometric mean) である．
10.
   $$Z = R\left[1 + j\frac{\omega_0 L}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\frac{1}{\omega_0 C\omega_0 L}\right)\right]$$
   $$= R\left[1 + j\frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right].$$
11. $Z = R\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$
   とかける．また，これまでの計算結果より，
   $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.
12. $Z = R\left[1 + Q\left(\frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{j\omega}\right)\right]$

とかけるから，$s=j\omega$ とおいて書き換えると，

$$\begin{aligned} Z(s) &= R\left[1+Q\left(\frac{s}{\omega_0}+\frac{\omega_0}{s}\right)\right] \\ &= R\left[\frac{\omega_0 s+Qs^2+Q\omega_0^2}{\omega_0 s}\right] \\ &= R\frac{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}{\frac{\omega_0}{Q}s}. \end{aligned}$$

分子，分母を ω_0^2 で割り，$p=\dfrac{s}{\omega_0}$ とおくと，

$$Z(p)=\frac{p^2+\frac{1}{Q}p+1}{\frac{1}{Q}p}R \tag{2}$$

と書ける．当然のことだが，$p=j$ で $|Z(p)|$ は最小値 R をとり，$Z(p)$ の値は正の実数となる．

なお，あらゆる受動回路網関数の s **のべき乗の係数はすべて正**の実数 (positive real) です．受動回路 (passive circuits) とは，トランジスタのような能動素子を含まない回路です．つまり，R, L, C, M と電源から作られる回路です．[4]

$Z(p)$ はとてもシンプルな式になりました．で，$p=\frac{j\omega}{\omega_0}$ の制約を離れ，一般の複素数と考えてみます．$Q>\frac{1}{2}$ ならば，$Z(p)$ の分子の根の判別式は $\frac{1}{Q^2}-4<0$ となります．つまり，$Z(p)$ の零点は，p の複素平面において**左半平面**の虚軸付近に存在します．零点の実部は $-\frac{1}{2Q}$ で，通常 Q はとても大きいからです．$Q\to\infty$ では虚軸上に移動するでしょう．これが完全な共振であり，抵抗 R がゼロの場合にほかなりません.[5] また，Q が非負であるかぎり，$Z(p)$ の零点や極が p の，したがって s の複素平面の右半平面に行くことはありません．これが**正実性**であり，**受動性**にほかなりません．

直列共振回路を流れる電流は $Z(p)$ の逆数に比例しますから，$Z(p)$ の零点は電流にとって極となります．第 3 節で固有ベクトルとかラプラス変換を説明しますが，応答波形は固有ベクトルのスカラー倍として表わされるはずですから，$p=\sigma+j\omega$ とかくと，

$$e^{pt}=e^{(\sigma+j\omega)t}=e^{\sigma t}e^{j\omega t} \tag{3}$$

の定数倍が電流としてあらわれます．$e^{j\omega t}$ は正弦波振動です．$e^{\sigma t}$ は $\sigma<0$ のときは時間の経過につれて減衰しますが，$\sigma>0$ のときは増大します．受動とは，こういうことがない，回路の応答出力のエネルギーがもともとのエネルギーよりも増えることはないということです．

[4] M とは mutual coupling, 相互結合を表わします．
[5] ある関数の値がゼロになる点を零点 (zero) といい，無限大に発散する点を極 (pole) という．

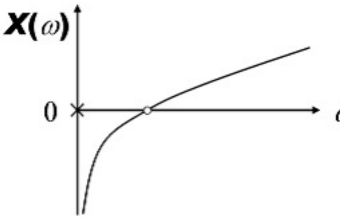

Figure 3: Reactance plot of the series resonance.

13. 共振周波数 $\omega=\omega_0$ では
$V_L=j\omega_0 L\frac{E_0}{R}=jQE_0,$
$V_C=\frac{1}{j\omega_0 C}\frac{E_0}{R}=-jQE_0.$
つまり，V_L と V_C は互いに逆位相で，$V_L+V_C=0$ である．また，V_L と V_C の大きさは $Q>1$ ならば，電源の電圧振幅を超える．共振回路では通常 $Q=10\sim100$ 程度であるから，V_L, V_C の大きさは電源電圧をはるかに上回る．
14. $X(\omega)=\mathrm{Im}[Z(\omega)]=\omega L-\frac{1}{\omega C}$. だから $X(\omega)$ は Fig. 3 に示すとおり，$\omega=[0,\infty)$ において $X(0)=-\infty$ から $X(\infty)=+\infty$ へ右上がりに変化する単調増加である．また，$X(\omega_0)=0$ である．

なお，あらゆる**受動回路のリアクタンス（つまり，インピーダンスの虚部）は単調増加関数**です．したがって**リアクタンスの極と零点は周波数軸上で交互に**並びます．[6] (The reactance of any passive circuit is monotonically increasing. Its *poles and zeros alternate* on the frequency axis.)

直列共振回路のリアクタンスはすでに調べたとおり，$\omega=0$ で極，$\omega=\omega_0$ で零点，$\omega=\infty$ で極と交互に並んでいました．最も簡単な例を点検しましょう．コイルのリアクタンスは $X(\omega)=\omega L$ であり，$\omega=0$ が零点，$\omega=\infty$ が極です．キャパシタのリアクタンスは $X(\omega)=-\frac{1}{\omega C}$ であり，$\omega=0$ が極，$\omega=\infty$ が零点です．

ポイントは次の 2 点です．受動回路では

- リアクタンスは単調増加である．ゆえに
- リアクタンスの極と零点は虚軸上で交番する．

すると，回路網の (機械構造物システムでも同じことですが) リアクタンスの個数，すなわちシステムの次数を数えると，リアクタンスが周波数に対してどのように変化するかが分かります．したがってシステムの応答がどうなるか，察しがつきます．高層建築，橋梁，列車，船舶，飛翔体でも同じことです．これは強力な知識です．

[6] 連続関数が $-\infty$ から $+\infty$ へ変化する途中には必ず 0 が存在しますね．そして，単調増加ですから，隣接する 2 つの極の間に 0 が複数回あらわれることはありませんね．

正実性は古典回路網理論 (classical circuit theory) の根幹概念です．古典だから，古くて時代遅れというわけではありません．クラシック音楽と同様です．[7]

2.3　複素数の計算

$A = a + jb = |A|e^{j\alpha}$, $B = x + jy = |B|e^{j\beta}$ と書く．
$|A|^2 = A^*A = (a - jb)(a + jb) = a^2 + b^2$,
$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$.
$|AB| = |A||B| = \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$,
$\angle AB = \alpha + \beta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$,
because $AB = |AB|e^{j(\alpha+\beta)}$.
$\left|\frac{A}{B}\right| = \frac{|A|}{|B|} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を使わないと損をする．位相を求めるとき，$\angle\frac{A}{B} = \alpha - \beta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ を使う．こうなる理由は $\frac{A}{B} = \left|\frac{A}{B}\right| e^{j(\alpha-\beta)}$.

へたくそは
$\frac{A}{B} = \frac{a+jb}{x+jy} = \frac{(a+jb)(x-jy)}{(x+jy)(x-jy)} = \frac{(ax+by)+j(bx-ay)}{x^2+y^2}$
と有理化してから，
$\left|\frac{A}{B}\right| = \frac{\sqrt{(ax+by)^2+(bx-ay)^2}}{x^2+y^2}$
と計算する．最悪だ．手間がかかるうえに，ごたごたして見通しが悪い．百害あって一利なし．偏角（位相）の計算についても同様で，有理化せずに計算するのがよい．

2.4　なぜ正弦波に対する回路の応答をフェイザで表示するのか

電気回路の交流動作（正弦波に対する定常応答）を簡単に（微分積分を使わずに，加減乗除を使って）記述できるからです．

2.5　フェイザとラプラス変換は姉妹です

過渡応答を調べるときは，回路方程式の角周波数を $s = j\omega$ と書き換えます．あとは，フェイザと同様の代数演算で目的の量を求めます．で，最後に時間領域の表現を記載するとき (フェイザでいえば瞬時値を時間の関数として露骨に記載する段階) に，ラプラス変換対

$$e^{pt} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-p} \tag{4}$$

を利用します．p は極です．[8]

ほら，見えてきましたか．じつは，フェイザとは角周波数 ω の成分だけをフーリエ変換したものに等しいのです．いわば，最後にフーリエ変換対 [9]

$$e^{j\omega t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\Omega - \omega) \tag{5}$$

によってフェイザ表示から瞬時値表示に逆変換することに相当します．つまり，フェイザ $A = A_0 e^{j\theta}$ から瞬時値表現 $a(t) = A_0 e^{j\theta} e^{j\omega t} = A_0 e^{j(\omega t+\theta)}$ にもどるのですね．

3　指数関数は微分の固有ベクトル

3.1　固有ベクトルとは？

定義　ベクトル空間における線形演算子 $\boldsymbol{L}$ に関して

$$\boldsymbol{L}x = \lambda x \tag{6}$$

を満足するベクトル x を $\boldsymbol{L}$ の固有ベクトル (eigen vector) といい，λ を $\boldsymbol{L}$ の固有値 (eigen value) という．[10]

例　$e^{j\omega t}$ は微分，積分の固有ベクトルです．なぜなら

$$\frac{d}{dt}e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}, \qquad \int e^{j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega}e^{j\omega t}.$$

そして，$j\omega$ は微分の固有値，$\frac{1}{j\omega}$ は積分の固有値です．

3.2　関数はベクトルだ

補足　ベクトルが関数だというのではありません．逆は必ずしも真ならず，です．

Q. うっそー？

A. いいえ，本当です．ベクトルの公理に照らして確認してください．

【ベクトルの公理】ある集合の元（げん）に対して和（わ）とスカラー倍を考える．任意の元 a, b, c に対して，m, n を任意のスカラーとして，次の 7 つの命題を満足するとき，この集合の元をベクトルという．
1) $a + b = b + a$
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$
3) $m(na) = (mn)a$
4) $(m + n)a = ma + na$
5) $n(a + b) = na + nb$
6) There exists 0 such that $a + 0 = a$.
7) There exists $-a$ such that $a + (-a) = 0$.

---

[7] 幸運にも著者は回路理論について幾多の大先達に学ばせて頂きました．ここでは永井信夫先生 (2001 年北大を定年) のことを記します．先生は量子力学におけるパラドックスを回路理論によって解明することをライフワークとして研究継続中です．おおよその成果を著書としても出版されました．永井信夫, “新しい概念による回路理論と量子力学への応用,” 正文社, 2013.

[8] if $p = 0$, $1 \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s}$.

[9] Eq. (5) において $\omega = 0$ とすれば，　$1 \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\Omega)$.

[10] λ はスカラーです．スカラーとはベクトルでない，ただの数（すう）ということです．

3.3　○○変換について

関数はベクトルだ，と納得できましたか．すると○○変換とか○○展開という類を簡単に理解することができます．さっそく始めましょう．

3.3.1　任意のベクトルを基底ベクトルの線形結合として書き表わす

平面上の点はベクトルとみることができますね．座標軸を適当に選んで，たとえば直交する x 軸と y 軸を定めるとき，点 A の座標が (3, 4) だとします．これは，基底ベクトルを 2 つ，たとえば

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を選んで，それぞれの重み係数を 3，4 として，2 つのベクトルの合成 (加算) により

$$A = 3e_1 + 4e_2 \tag{7}$$

と表わすことができます．このようなベクトルの加重和を線形結合 (linear combination) といいます．

ちなみに，いま定めた 2 つの基底ベクトルは直交しています．内積 (inner product) をかぎかっこで表記します．$\langle e_1, e_2 \rangle = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$ ですから，確かに直交していることが分かります．このように，互いに直交する基底ベクトルの線形結合で表現することを**直交展開**とか，**直交変換**とよびます．線形結合における重み係数は，展開しようとしている対象と個々の基底ベクトルの内積で与えられます．

$$\langle e_1, A \rangle = \langle e_1,\ 3e_1 + 4e_2 \rangle = 3, \tag{8a}$$
$$\langle e_2, A \rangle = \langle e_2,\ 3e_1 + 4e_2 \rangle = 4 \tag{8b}$$

です．なぜか？ 内積は，一方のベクトルを他方のベクトルへ**射影**したときの影の長さを表わすからです．たとえば，展開しようとしている対象が点 $(1, \sqrt{3})$ だとします. この点と単位ベクトル e_1 との内積を計算するということは，この点から水平軸に向かって垂線を下ろします（射影します）．水平軸との交点が，この点の e_1 への射影です．その長さは $2\cos\frac{\pi}{3} = 1$ ですね．

○○変換における逆変換が Eq. (7) であり，順変換が Eq. (8) に該当します．

3.3.2　射影は内積によって計算される

脱線ですが，射影 (projection) とは何か？

あるもの x（ベクトルとか，関数とか，点とか）にある操作 $\boldsymbol{P}$ を作用させた結果を $\boldsymbol{P}x$ とかきます．これに操作 $\boldsymbol{P}$ を繰り返しても，結果が変わらない操作を射影とよびます．つまり，$\boldsymbol{P}$ が射影であるための必要十分条件は任意の x に対して

$$\boldsymbol{P}^2 x = \boldsymbol{P}x$$

を満たすことです．前節で説明したとおり，射影は内積によって計算されました．

3.3.3　ラプラス変換，フーリエ変換，フーリエ級数

以上で理論の枠組みが完成しました．$\frac{d}{dx}e^x = e^x$ の話と接続しましょう．$\frac{d}{dx}e^x = e^x$ ですから，一般に指数関数 e^x は微分に対する固有ベクトルなのです．

Laplace 変換は e^{st} を基底ベクトルに選んだ線形結合です．ただし，s は複素数で，$s = \sigma + j\omega$ とかくことができます．で，$f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ とは

$$F(s) = \left\langle e^{st},\ f(t) \right\rangle \tag{9}$$

のことです．Fourier 変換は $e^{j\omega t}$ を基底ベクトルに選んだ線形結合です．で，$f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ とは

$$F(\omega) = \left\langle e^{j\omega t},\ f(t) \right\rangle \tag{10}$$

のことです．Fourier 級数は $e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$ を基底ベクトルに選んだ線形結合で，周期 T の周期関数の表現法です．周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数展開の係数 $F(n)$ とは

$$F(n) = \left\langle e^{j\frac{2\pi}{T}nt},\ f(t) \right\rangle \tag{11}$$

のことです．基本周波数成分とその整数倍の高調波 (harmonics) を表わすために，n は整数をとります．

基底ベクトルの個数が不可算無限個 [11] や可算無限個 [12] に増えましたが，考え方は平面上の点を 2 つのベクトルの線形結合で書き表す場合と同じです．

[11]実数の総数＝数えきれないほど多い無限．uncountable infinity
[12]整数の総数＝ 1 つ，2 つ，3 つと数えてゆける無限

3.4　直交基底と非直交基底

基底ベクトルには互いに**１次独立**[13] なものを選びます．直交基底を多用しますが，非直交基底もあります．たとえば，平面上の点を表わすのに

$$e_1 = e^{j\frac{2\pi}{3}1}, \qquad e_2 = e^{j\frac{2\pi}{3}2}, \qquad e_3 = e^{j\frac{2\pi}{3}3}$$

の 3 つを選んでも支障ありません．通常は無駄ですが，ときには無駄の効用もあります．こういうのを非直交過剰基底 [14] とよびます．

ウェーブレット変換では双直交基底もつかいます．それは次のようなコンセプトです．

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix},$$
$$u_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と 2 組の基底系を考えます．第 1 基底系の 2 つの基底ベクトルは非直交です．第 2 基底系も非直交です．しかし，両基底系から 1 つずつ基底を選んで内積を点検すると，

$$\langle e_1, u_2 \rangle = 0, \qquad \langle e_2, u_1 \rangle = 0$$

です．このような 2 つの基底系をセットにして使うとき，このセットを双直交基底 (bi-orthogonal basis) とよびます．MPEG-4 や JPEG2000 など，画像や映像，デジタルシネマ（高精細デジタル映画）の情報圧縮に使っています．

3.5　まとめ

これらの表現法（wavelet[15] を除く）はいずれも微分方程式で表わされるモノ（現象やシステムなど）を記述するのに有効です．理由は，もう言わなくても分かりますね．そうなんです．物理現象の多くは微分方程式で記述されていますね．だからなのですね．

$\frac{d}{dx}e^x = e^x$ は指数関数の微分公式，という理解だけではもったいない．要点は何だったでしょうか．復習しておきましょう．

- $e^{j\theta}$ は単位円上の点を表わし，周期的だ
- $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
- 関数はベクトルだ
- 直交するとは内積が 0 であること

[13]linearly-independent
[14]non-orthogonal over-complete basis
[15]wavelets は微分に対する固有ベクトルではありません．ある種の差分平均に対する固有ベクトルです．故 山口昌哉京大名誉教授はこれを和分と命名しました．和分という用語は定着しませんでしたが，適切な命名だったと思います．

4　回路方程式の立てかた

m 個の枝 (branches) と n 個の節点 (nodes) からなる回路があると仮定します．2 つの方法を記しますが，結論からいうと，節点解析 (node analysis) が使いやすい．

4.1　節点解析

- 節点の 1 つを基準として，$n-1$ 個の節点電位を定義し，未知数 $\boldsymbol{V}$ とする．
- $n-1$ 個の節点について，KCL[16] により，連立方程式 $(\boldsymbol{Y})(\boldsymbol{V}) = (\boldsymbol{I})$ を立てる．

4.2　閉路解析

- $m-n+1$ 個の基本閉路電流 (補木の枝電流) を定義し，未知数 $\boldsymbol{I}$ とする．
- $m-n+1$ 個の基本閉路について，KVL[17] により，連立方程式 $(\boldsymbol{Z})(\boldsymbol{I}) = (\boldsymbol{V})$ を立てる．

目視で「基本閉路」をもれなく数え上げることは容易でない．基本閉路の定義には，木 (tree) と補木 (co-tree, complementary tree) の概念が必要です．

定義　**木**とは，すべての節点をつなぐ枝の集合のうち，枝の数が最小のものをいいます．

たとえば，2 つの節点をつなぐには枝 1 本ですみますし，3 つの節点をつなぐには枝が 2 本で十分です．このように，木を構成する枝の数は $n-1$ です．

定義　ある木について，その**補木**とは，回路全体から木を取り除いたときに残る枝の集合です．

したがって補木に含まれる枝の数は $m-n+1$ です．

定義　ある木について，その補木の枝によって定まる閉路を**基本閉路**といいます．

木は，既にすべての節点をつないでいますから，補木の枝を 1 つ付けると必ず閉路ができます．補木の枝の付加によってできる閉路は $m-n+1$ 種類ありますが，補木の枝に重複はありませんから，これらの閉路はいずれも，互いに相異なります．

[16]Kirchhoff's current law
[17]Kirchhoff's voltage law

5　雑談

5.1　過渡応答とインパルス応答

ところで，電気回路でも，電子回路でも，制御システムでも，機械システムでも，橋やビルディングなどの構造物でも同じことですが，交流動作，すなわち（正弦波）定常応答 (steady-state response) のほかに，直流動作（直流応答）と過渡応答 (transient response) があります．

直流動作とは，周波数がゼロの入力に対してシステムがどういう応答を出力するか，ということです．直流定常応答は，周波数がゼロの正弦波に対する交流応答とみても差し支えありません．現実的には，直流装置と交流装置では周波数帯域のちがいによって，それぞれ固有の工夫が必要になることが多いため，別個に取り扱うのが通例です．

過渡応答には初期値問題とインパルス応答があります．後者は，インパルス (デルタ関数) 状の入力に対してシステムがどのように応答するか，を調べることです．叩(たた)いて診(み)る (knock to see) という方法です．

スイカの熟(う)れ具合をみるときに，指で弾きます．そして，音を聴いて完熟度を推定します．コッ，コッと硬くて短い音のときはまだ熟していません．ボン，ボンという感じが食べごろですね．ボーン，ボーンと反響音が長く，触れている手にまで振動が感じられるスイカは熟し過ぎです．中身はすかすかの空洞になっていると推測されます．

お医者さんは胸部疾患を診るとき，指でとんとんとたたいて，聴診器で音を聴きます．これらの方法はいずれも，インパルス応答をみるという科学的な方法なのです．地球の地殻構造推定や地震解析，資源探査なども，原理的には同じことです．スイカを胸部や地球に置き換えれば，方法は同じです．

5.2　回路理論の単純さとか汎用性とか

システム理論や制御理論などはいずれも電気回路理論から発展，誕生しました．基本概念の多くは回路理論に帰着させることができます．おそらく古典回路理論は，数学におけるユークリッド幾何学，物理学における古典力学と並んで，単純で厳密で美しい理論を誇ります．そして広範に適用できる汎用性を備えています．

単純なことほど奥深い世界を見せることがあります．音楽や囲碁，将棋はその典型ですね．回路学はとくに音楽の作曲に似ていると思います．回路も音楽も基礎理論が単純です．一方，それは限りないバリエーションを秘めており，そこに知性と感性が活躍する余地があります．また，回路も楽譜も，それを確実にほかの人へ伝達し，再現することができます．

電気回路理論の汎用性が高い理由は，形を問わないこと，対象を black box (暗箱) として一般化してとらえる態度にあります．回路図の図形としての「かたち」に意味はありません．節点が枝でつながる，そのつながり具合が回路です．回路図を見るとき，枝は伸縮自在だと思ってください．また，テブナンの等価電源は，対象をブラックボックスとして見るという究極の姿です．[18] 電気回路はテブナンに始まり，テブナンに終わると心してください．

[18]変電所から人々が生活する市街，施設等の集合体から成る電力網でも電気屋はテブナンの等価電源で表現して対処します．