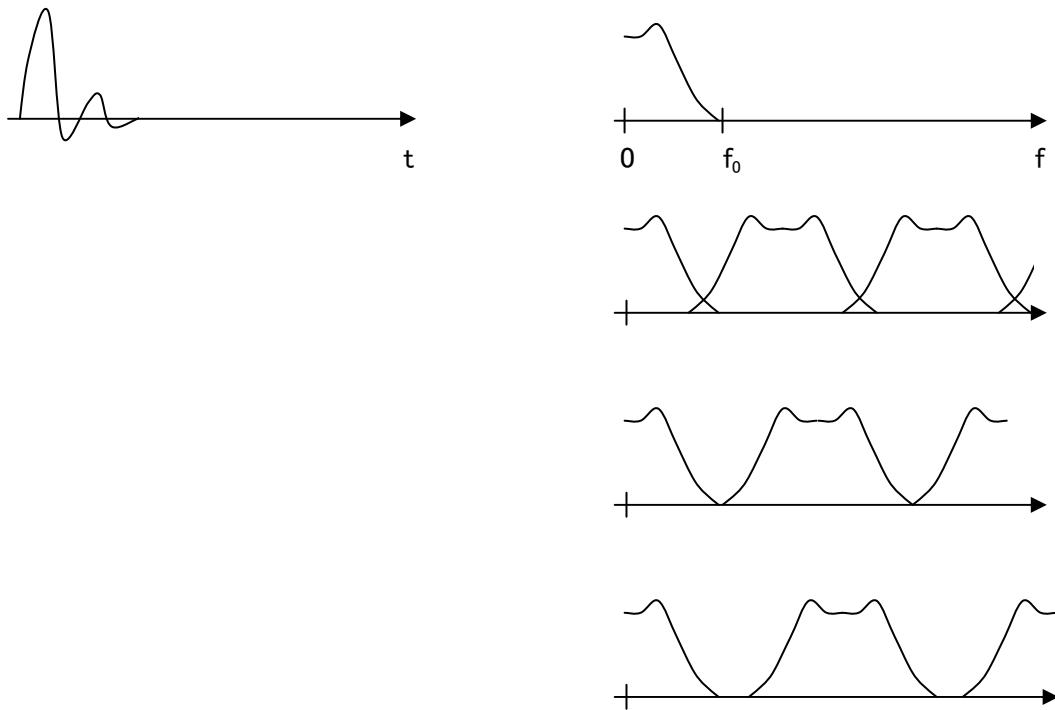
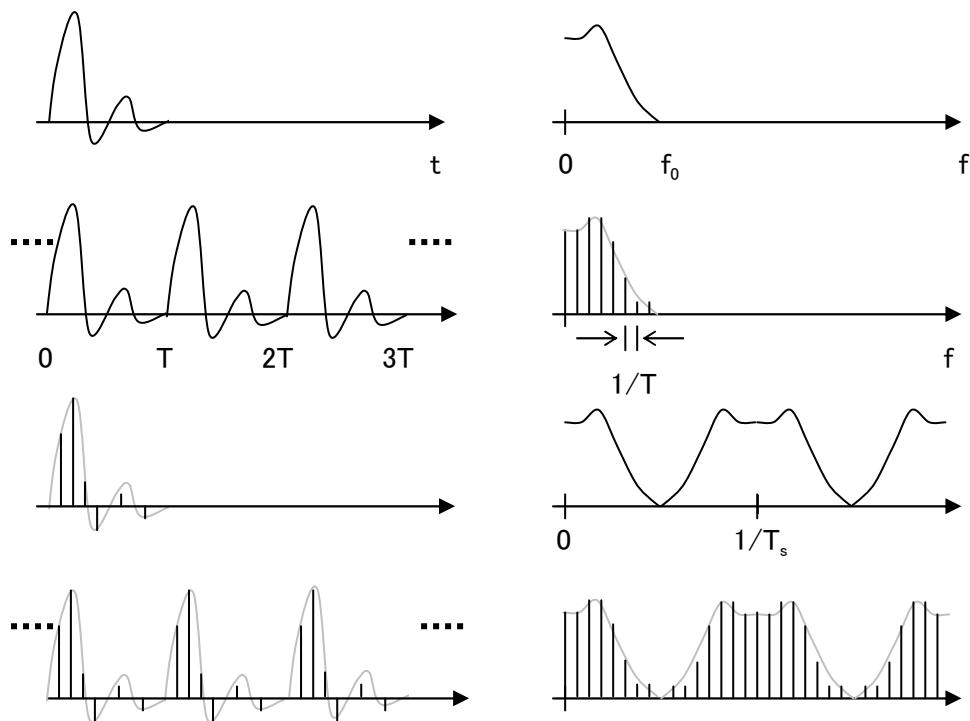


1 【Sampling will produce a number of translated copies of the spectrum】図の左側は時間領域におけるある信号波形を示し、右側はフーリエ変換を表している。左上の連続時間信号は $\pm f_0$ ヘルツに帯域制限されているものとする。この信号波形を標本化して離散時間信号をつくるとき、標本化周波数 f_s の選び方によって離散時間信号のスペクトルは右下に示す3つおりのうちのいずれかとなる。どのスペクトルがどのような標本化に対応するか、次の選択肢から選んで図中に記入しなさい。

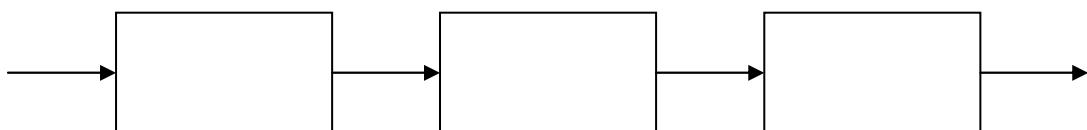
$$f_s > f_0, \quad f_s > 2f_0, \quad f_s = f_0, \quad f_s = 2f_0, \quad f_s < f_0, \quad f_s < 2f_0$$



2 【Waveforms and their spectra in terms of periodicity】図の左側は時間領域における信号波形を示し、右側はそれぞれのフーリエ変換を表している。最上段の信号をもとにして、周期信号や離散時間信号を作るとき、それぞれのフーリエ変換を描きなさい。このとき、周期スペクトルの周期がどれほどか、線スペクトルのスペクトル分解能(スペクトル線の間隔)はどれほどか、記入しなさい。ただし、周期信号の周期を T 、標本化周期を T_s とし、標本化は標本化定理を満足するように行われると仮定する。



3 【常識】連続時間信号からデジタル信号をつくるシステムを考える。語群{符号化、標本化、平滑化、最適化、量子化、z変換、低域通過アナログフィルタ、低域通過デジタルフィルタ}の中から適当な言葉を選んでブロック図に記入しなさい。



4 【これも常識。解答を間違えたら DSP の単位は認定できません】連続時間信号

$$x(t) = 4\cos(2\pi f_1 t) + 2\sin(2\pi f_2 t) - \cos(2\pi f_3 t + \pi/2)$$

$$\text{ただし, } f_1 = 5\text{kHz}, f_2 = 10\text{kHz}, f_3 = 20\text{kHz}$$

をそのスペクトル情報を乱さないように標本化したい。サンプリング周波数をどのように定めればよいか。

5 信号振幅が 90dB、最高周波数成分が 20kHz のアナログ信号を、なるべく低速のデジタル信号に変換したい。所要サンプリング周波数と A/D コンバータの所要ビット数(符号ビットを含む)を求めよ。

答え: 符号を除いたビット数をNとかく。信号の最小振幅に対する最大振幅の比が 90dB と考えると

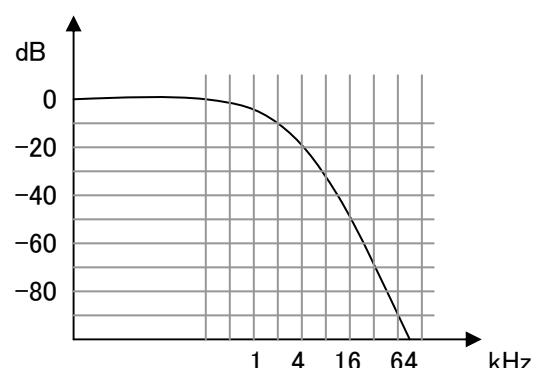
$$20 \log 2^N = 90 \text{ である。 } \log 2 = 0.3010 \text{ だから } N=15$$

ゆえに、符号ビットを加えて、16ビットが必要である。また、標本化定理により、標本化周波数はアナログ信号の2倍以上でなければならないから、所要サンプリング周波数は40kHz 以上でなければならない。

6 【Dynamic Range of Signals】音楽演奏をデジタル録音するとき、少なくとも102dBのダイナミックレンジを確保したい。信号の最大振幅に対する量子化ステップサイズの比をダイナミックレンジと定義するとき、符号ビットも含めて何ビットの量子化が必要か。

略解: $20 \log 2^N \geq 102$, つまり $6.02N \geq 102$ より $N=17$. したがって18ビットが必要

7 【SNR, Signal to Noise Ratio】位相特性が十分に直線的(群遅延特性が十分に平坦)なアナログフィルタの振幅特性を右図に示す。横軸の周波数は対数目盛りとなっており、図示のとおり、1目盛りが1オクターブに相当する。このフィルタをアンチエイリアスを目的として使用し、最大信号振幅に対するエイリアス成分のSNRを44dB程度確保し、なるべく低速な標本化をしたい。標本化周波数をいくらに選べばよいか。



略解: 16kHzで-50dBの減衰量だ。エイリアスで隣合う特性

が重なり、2倍、つまり6dBだけ減衰が劣化すると-44dBになる。また、標本化定理を満足するためには、16kHzの2倍、32kHz以上の標本化周波数が必要だ。

8 【HDTV, High-Definition Television】 日本や北米で普及したNTSC方式のテレビジョン信号の内訳は輝度信号に4.2MHz、同相色差信号に1.5MHz、直交色差信号に0.5MHzの帯域が使用されている。つまり合計6.2MHzの帯域が使用されている。この、いわば多重化してひとつにまとめた帯域幅6.2MHzの単一信号を理想低域通過フィルタで帯域制限して標本化し、標本値を8ビットに一様量子化してデジタル信号に変換するとき、少なくとも毎秒何ビットのデータができるか、答えなさい。

一方、NTSC方式のテレビジョン信号の有効走査線は480本であり、アスペクト比（横と縦の画面サイズの比）は4:3であるから、デジタル映像としては縦横480×640画素の画面に相当すると考えられる。このような画像を毎秒30枚表示することによってデジタルテレビジョン映像とする。また、ヒトの視覚が色差に対して比較的鈍感であることを利用して、デジタルテレビジョン映像では輝度信号Yは1画素ごとに指定するが、2つの色差信号C_bとC_rは4画素ごとに指定することが多い。1画素当たり8ビットで表現するとき、このデジタル映像の毎秒のビットレート(bit rate)はいくらになるか、答えなさい。

略解 $(4.2+1.5+0.5)\text{MHz} \times 2 \times 8\text{bits} = 99\text{Mbps}$ (bits per second)

$$480 \times 640 \times 30 \times 8 \times (1+0.25+0.25) = 110\text{Mbps}$$

つまり、現行TV映像の品質は縦横480×640画素のデジタル映像に相当する。

9 【離散時間システムの解析】 図の離散時間システムにおいて、遅延器(delay)の初期値は零とする。

(1) このシステムの差分方程式をかきなさい。

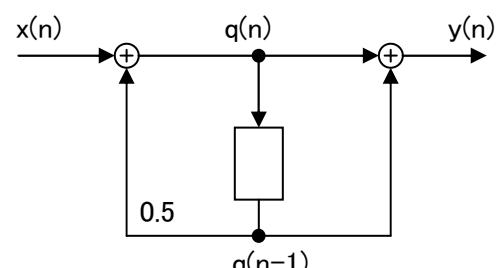
$$q(n) = 0.5q(n-1) + x(n)$$

$$y(n) = q(n) + q(n-1)$$

(2) 差分方程式をz変換し、伝達関数を求めなさい。

$$(1-0.5z^{-1})Q(z) = X(z)$$

$$\text{故に } \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(1+z^{-1})Q(z)}{1-0.5z^{-1}} = \frac{z+1}{z-0.5}$$



(3) 極(poles)と零点(zeros)の配置を×と○でそれぞれ図示しなさい。

×が極、○が零点を表す。

(4) このシステムは安定か、不安定か答えなさい。

極が単位円の内側にあるから、安定である。

(5) 単位ステップ(unit step)を入力したとき、出力応答を逆z変換によって求めなさい。

$$U(z) = 1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\dots = 1/(1-z^{-1})$$

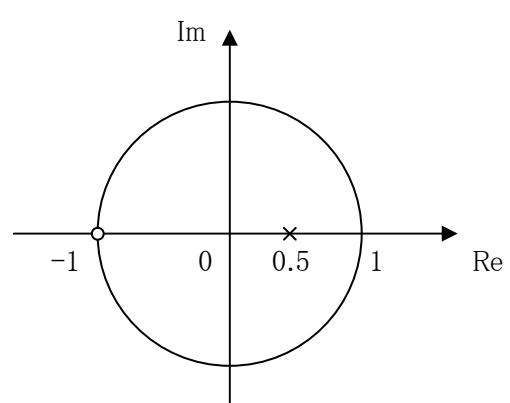
$$\text{このとき } Y(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})(1-z^{-1})}$$

a, b を未知数として部分分数に展開すると、

$$Y(z) = \frac{a}{1-0.5z^{-1}} + \frac{b}{1-z^{-1}}$$

$$\text{係数を等置して、} \begin{cases} a + b = 1 \\ -a - 0.5b = 1 \end{cases} \therefore \begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \end{cases}$$

したがって、 $y(n) = -3(0.5)^n + 4(1)^n$, for $n \geq 0$

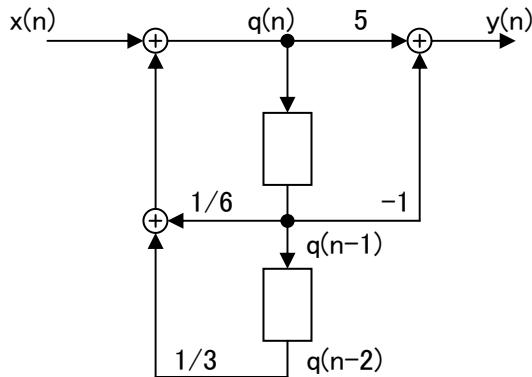


a, b の求め方の別法(極の留数を計算する):

$$Y(z) = z(z+1)/(z-0.5)(z-1)$$

$$a = Y(z)(z-0.5)/z|_{z=0.5} = -3, b = Y(z)(z-1)/z|_{z=1} = 4$$

10 図のような離散時間システムにおいて、遅延器(delay)の初期値は零とする。



- (1) このシステムの差分方程式 (difference equations) をかきなさい。
- (2) 差分方程式を z 変換し、伝達関数 (transfer function) を求めなさい。
- (3) 複素平面上に極 (poles) と零点 (zeros) の配置を \times と \circ でそれぞれ図示しなさい。
- (4) このシステムが安定 (stable) かどうか答え、その理由を述べなさい。
- (5) 部分分数展開 (partial fraction expansion) により並列型システムとして構成しなさい。
- (6) インパルス $\delta(n)$ を入力したとき、出力応答 (output response) を求めなさい。

略解 $H(z) = 3/(1+z^{-1}/2) + 2/(1-2z^{-1}/3)$

$$h(n) = 3(-1/2)^n + 2(2/3)^n, \text{ for } n \geq 0$$

11 伝達関数 $H(z) = (1+2z^{-1})(1+z^{-1})/(1-z^{-1}/2)(1-z^{-1}/4)$ を有するシステムの構成ブロック図を描きなさい。このシステムの安定性を調べなさい。

略解 2つの1次 IIR システムの継続接続で構成される。安定だ。

12 伝達関数が $H(z) = (1/3)z^{-1}/[1-(5/6)z^{-1}+(1/6)z^{-2}]$ で与えられるシステムの構成ブロック図を描きなさい。つぎに、このシステムを並列接続構成として再構成しなさい。

略解 $H(z) = (1/3)z^{-1}/[1-(5/6)z^{-1}+(1/6)z^{-2}] = 2/[1-(1/2)z^{-1}] - 2/[1-(1/3)z^{-1}]$

/追加/ 直線位相 FIR フィルタにはインパルス応答波形に著しい特徴がある。デジタルフィルタのインパルス応答を $h(n) = \{h(0), h(1), h(2), \dots\}$ とかくとき、つぎの中から直線位相特性を有するデジタルフィルタを選びなさい。

- A $h(n) = \{-1, 2, 6, 2, -1\}$
- B $h(n) = \{-1, 1\}$
- C $h(n) = \{1, 3, 3, 1\}$
- D $h(n) = \{-1, 4, 3, 2, 1\}$
- E $h(n) = \{1, 2, 3, 4, -1\}$
- F $h(n) = \{1, 0, -1\}$

ヒント 直線位相フィルタのインパルス応答波形は対称 (symmetric)、または反対称 (anti-symmetric) である。

13 伝達関数が $H(z) = (1+2z^{-1}+z^{-2})/[1-(3/4)z^{-1}+(1/8)z^{-2}]$ と与えられるシステムの構成ブロック図を描きなさい。つぎに、インパルス応答を求めなさい。

略解 分母を因数分解すると $H(z) = (1+2z^{-1}+z^{-2})/[1-(1/2)z^{-1}][1-(1/4)z^{-1}]$ となる。

これを $H(z) = (1+2z^{-1}+z^{-2})H_2(z)$ 、ただし $H_2(z) = 1/[1-(1/2)z^{-1}][1-(1/4)z^{-1}]$ とすれば、

$$h(n) = h_2(n) + 2h_2(n-1) + h_2(n-2) \quad \dots \text{(a)}$$

である。 $H_2(z)$ の極 p における留数(residue)を $\text{Res}(p)$ とかくと

$$\text{Res}(1/2) = [1-(1/2)z^{-1}] H_2(z) |_{z=1/2} = 2$$

$$\text{Res}(1/4) = [1-(1/4)z^{-1}] H_2(z) |_{z=1/4} = -1$$

$$H_2(z) = 2/[1-(1/2)z^{-1}] - 1/[1-(1/4)z^{-1}]$$

これを逆 z 変換すれば、 $h_2(n) = 2(0.5)^n - (0.25)^n$, for $n \geq 0$

これを式(a)に代入すれば、

$$h(n) = 2(0.5)^n - (0.25)^n + 2[2(0.5)^{n-1} - (0.25)^{n-1}] + \{2(0.5)^{n-2} - (0.25)^{n-2}\}, \text{ for } n \geq 0$$

14 【離散時間信号のスペクトルは周期的である】 連続時間信号 $x(t)$ に周期 T の標本化パルス列 $s(t) = \sum_n \delta(t-nT)$ を乗じて得られる標本信号を $x^*(t)$ とかく。 $x^*(t)$ のフーリエ変換を求めなさい。

答え: $x^*(t) = x(t)s(t)$ である。標本化パルス列 $s(t)$ は周期信号であるから、 $\Omega = 2\pi/T$ とかくとフーリエ級数により

$$s(t) = (1/T) \sum_n e^{jn\Omega t}$$

とかける。したがって $x^*(t)$ のフーリエ変換は

$$X^*(\omega) = \mathcal{F}[(1/T)x(t) \sum_n e^{jn\Omega t}] = (1/T) \sum_n \mathcal{F}[x(t)e^{jn\Omega t}] = (1/T) \sum_n X(\omega - n\Omega)$$

とかける。つまり $X^*(\omega)$ は $X(\omega)$ を Ω ずつ並進したコピーの寄せ集めである。したがって、それは周期 Ω の周期的スペクトルである。

15 【標本化定理】 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega)$ が $X(\omega) = 0$ for $|\omega| \geq \Omega$ とする。 $T = 2\pi/2\Omega$ とかくと、

$$x(t) = \sum_n x(nT) \sin \Omega(t-nT) / \Omega(t-nT)$$

であることを証明しなさい。

答え: $x(t)$ は帯域制限されており、 $T = \pi/\Omega$ と定めた場合、前問のように $x^*(t) = x(t)s(t)$ を考えたとき $x^*(t)$ のスペクトルには重なりが生じない。したがって $|\omega| < \Omega$ の区間では

$$X(\omega) = T X^*(\omega)$$

とかける。一方、 $X^*(\omega)$ は

$$x^*(t) = x(t)s(t) = \sum_n x(t) \delta(t-nT) = \sum_n x(nT) \delta(t-nT)$$

のフーリエ変換であるから

$$X^*(\omega) = \sum_n x(nT) \exp(-j\omega nT)$$

である。したがって

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[T X^*(\omega)]$$

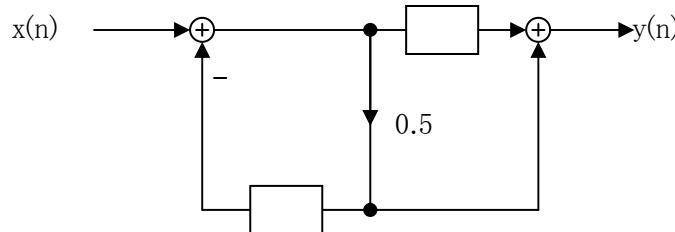
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \exp\{j\omega(t-nT)\} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-\Omega}^{\Omega} \exp\{j\omega(t-nT)\} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin \Omega(t-nT)}{\Omega(t-nT)}$$

16 【無歪み伝送には直線位相が必要だ】 伝送システムの入力、出力を $x(t)$, $y(t)$ とかく。入力信号波形が遅延し、相似波形として出力信号となるためにはどんな条件が必要であろうか。すなわち、 K 、 T をある定数として $y(t)=Kx(t-T)$ とかけるために伝送システムのインパルス応答のフーリエ変換 $H(\omega)$ はどのような条件を満たす必要があるか答えなさい。

答え： 条件式のフーリエ変換をつくると、 $Y(\omega)=K \exp(-j\omega T)X(\omega)$ となる。したがって、 $H(\omega)=K \exp(-j\omega T)$ でなければならない。すなわち $|H(\omega)|=K$, $\angle H(\omega)=-j\omega T$ でなければならない。振幅特性が一定で、位相特性が周波数に比例することが必要である。

17 【Allpass Filters, 全域通過フィルタ】 図のデジタルフィルタにおいて遅延器の初期値はゼロとする。 (1) 伝達関数 $H(z)$ を書きなさい。 (2) $|H(z)|^2$ を計算しなさい。 (3) 振幅周波数応答を描きなさい。 (4) 極と零点の配置を z 平面上に図示しなさい。 (5) 極を z_p とき、零点を z_z といて、 $z_p z_z = 1$ であることを確認しなさい。(このような関係を満たす2つの点は、単位円に関して互いに鏡像(a pair of mirror images with respect to the unit circle)であるという。) (6) このフィルタが安定かどうか答え、その理由を述べなさい。 (7) インパルス $\delta(n)$ を入力したとき、出力応答を計算しなさい。



$$\text{略解 } H(z) = (0.5 + z^{-1}) / (1 + 0.5z^{-1})$$

$$\begin{aligned} |H(z)|^2 &= H^*(z)H(z) = H(z^*)H(z) = (0.5 + (z^*)^{-1})(0.5 + z^{-1}) / (1 + 0.5(z^*)^{-1})(1 + 0.5z^{-1}) \\ &= [0.25 + 0.5((z^*)^{-1} + z^{-1}) + (z^*z)^{-1}] / [1 + 0.5((z^*)^{-1} + z^{-1}) + 0.25(z^*z)^{-1}] \end{aligned}$$

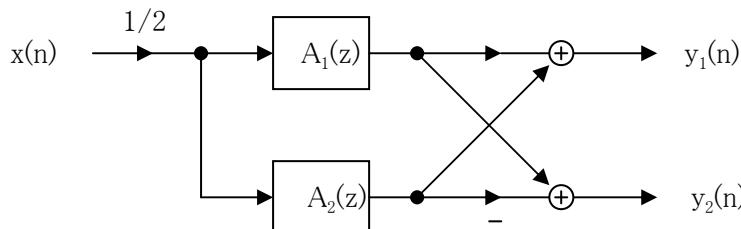
周波数応答とは伝達関数の単位円上、 $|z|=1$ における値であるから、 $z = e^{j\omega}$ を代入すれば

$$H(e^{j\omega}) = [0.25 + \cos\omega + 1] / [1 + \cos\omega + 0.25] = 1 \text{ つまり、角周波数に無関係に一定だ。}$$

極は $z_p = -0.5$ 、零点は $z_z = -2$ 。したがって $z_p z_z = 1$ である。また、安定である。

インパルス応答は、問 13 の解法を参考にして、 $h(n) = 0.5(-0.5)^n + (-0.5)^{n-1}$, for $n \geq 0$

18 【Power Complementary, 電力相補】 2つのオールパスフィルタ $A_1(z)$ と $A_2(z)$ から図のように1入力2出力システムを構成する。2つの経路の伝達関数を $H_1(z) = Y_1(z)/X(z)$, $H_2(z) = Y_2(z)/X(z)$ と定義するとき、 $H_1(z)$ と $H_2(z)$ を求めなさい。つぎに $|Y_1(z)|^2 + |Y_2(z)|^2$ を計算しなさい。



$$\text{略解 } H_1(z) = 0.5[A_1(z) + A_2(z)], H_2(z) = 0.5[A_1(z) - A_2(z)]$$

$$|H_1(z)|^2 = 0.25[|A_1(z)|^2 + A_1^*(z)A_2(z) + A_1(z)A_2^*(z) + |A_2(z)|^2] = 0.25[2 + A_1^*(z)A_2(z) + A_1(z)A_2^*(z)]$$

$$|H_2(z)|^2 = 0.25[|A_1(z)|^2 - A_1^*(z)A_2(z) - A_1(z)A_2^*(z) + |A_2(z)|^2] = 0.25[2 - A_1^*(z)A_2(z) - A_1(z)A_2^*(z)]$$

$$|Y_1(z)|^2 + |Y_2(z)|^2 = |H_1(z)|^2 |X(z)|^2 + |H_2(z)|^2 |X(z)|^2 = |X(z)|^2$$

19 【Zero-Interpolation Filters, 零補間フィルタ】 伝達関数が $H_1(z) = (1+z^{-1})/2$ で与えられるデジタルフィルタがある。新たに伝達関数 $H_n(z)$ を $H_n(z) = H_1(z^n)$ と定義する。4つのデジタルフィルタ $H_1(z)$, $H_2(z)$, $H_3(z)$, $H_4(z)$ のインパルス応答、零点配置、および振幅周波数特性をそれぞれ描きなさい。

略解

$$H_1(z) = (1+z^{-1})/2, \quad |H_1(e^{j\omega})| = |\cos\omega|$$

$$H_2(z) = (1+z^{-2})/2, \quad |H_2(e^{j\omega})| = |\cos 2\omega|$$

$$H_3(z) = (1+z^{-3})/2, \quad |H_3(e^{j\omega})| = |\cos 3\omega|$$

$$H_4(z) = (1+z^{-4})/2, \quad |H_4(e^{j\omega})| = |\cos 4\omega|$$

20 【Comb Filters, 櫛形フィルタ】 伝達関数が $H(z) = 1 - z^{-6}$ で与えられるデジタルフィルタのブロック図を描きなさい。インパルス応答 $[h(n)]$ を答えなさい。このデジタルフィルタの入力 $x(n)$ と出力 $y(n)$ との関係をあらわす差分方程式を書きなさい。極と零点を答えなさい。振幅について周波数特性を描きなさい。

略解

$$h(n) = \delta(n) - \delta(n-6)$$

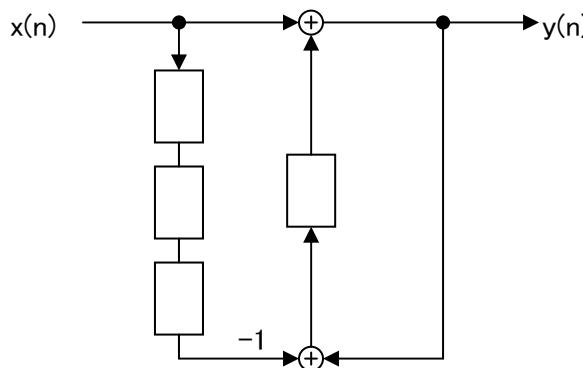
$$y(n) = x(n) - x(n-6)$$

極は原点、 $z=0$ に 6 重極になっている。

零点は単位円を 6 等分した点である。つまり $\exp(j2\pi k/6)$, $k=0, 1, 2, 3, 4$, and 5 .

$$H(e^{j\omega}) = 2e^{-j3\omega} (\sin 3\omega), \quad |H(e^{j\omega})| = 2|\sin 3\omega|$$

21 【RRS, Recursive Running Sum】 図のデジタルフィルタの伝達関数を答えなさい。振幅について周波数特性を描きなさい。このデジタルフィルタの構造は巡回型か非巡回型か答えなさい。このデジタルフィルタの応答特性は FIR か IIR か答えなさい。



略解

$$H(z) = (1 - z^{-4}) / (1 - z^{-1}) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$$

$H(1) = 4$, $H(-1) = 0$ であり、LPF (lowpass filter)である。

帰還ループをもっているので、巡回型である。

インパルス応答の長さは4であり、有限長だから FIR である。

22 【Interpolated FIR Filters; Y Neuvo, H Kikuchi】 伝達関数 $F(z)=(1+z^{-1})/2$ をもとにして FIR フィルタ $H(z)=F(z^3)G(z)$ を構成する。ただし、 $G(z)=1+z^{-1}+z^{-2}$ とする。 $H(z)$ のブロック図を描きなさい。 $F(z^3)$ と $G(z)$ の零点を複素平面上に図示しなさい。 $F(z^3)$ 、 $G(z)$ 、および $H(z)$ の振幅周波数特性を描きなさい。

考察のためのヒント: $G(z) = (1 - z^{-3})/(1 - z^{-1})$ とかけるから、

$$H(z) = 0.5(1 + z^{-3})(1 - z^{-3})/(1 - z^{-1}) = 0.5(1 - z^{-6})/(1 - z^{-1}) = 0.5(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5})$$

遮断特性のゆるい $F(z)$ から、 $F(z^3)$ により、遮断特性のするどい特性を作り、不要のスペクトルピークを減衰特性が緩慢な $G(z)$ で減衰させる。その結果、通過帯域が狭くて遮断特性が急峻な直線位相フィルタを構成することができる。一般には振幅特性の急峻な特性や狭帯域の直線位相フィルタは次数が高くなり、構成が難しくなります。が、この方法で効率的に作ることができます。

Yrjo Neuvo(イーリヨ・ネウボ)氏は当時タンペレ工科大学教授でしたが、その後 NOKIA(世界最大の携帯電話メーカー、従業員約22万人)の上席副社長として研究開発担当最高責任者になりました。ちなみにフィンランドの人口は約500万人です。

23 【Cyclotomic Resonator-Based FIR Filters; H Kikuchi】 2つの伝達関数

$$D(z)=1-z^{-3}, \quad R(z)=1/(1+z^{-1}+z^{-2})$$

の縦続接続によってデジタルフィルタ

$$H(z)=D(z)R(z)$$

を定義する。FIR フィルタ $D(z)$ の零点配置と周波数特性を図示しなさい。共振器 $R(z)$ の極配置を図示しなさい。デジタルフィルタ $H(z)$ のインパルス応答を答えなさい。 $H(z)$ が直線位相か否か答えなさい。 $H(z)$ の振幅周波数特性を図示しなさい。つぎに、

$$H(z)=R(z)-z^{-3}R(z)$$

と書き換えて並列システムとして構成しなさい。共振器 $R(z)$ のインパルス応答を計算しなさい。このデジタルフィルタ $H(z)$ では時刻 $n=0$ で $R(z)$ による共振が開始し、時刻 $n=3$ で最初の共振と逆極性の同一共振が重ね合わされる。共振出力波形の周期を考慮して考察し、デジタルフィルタ $H(z)$ のインパルス応答を2つの共振波形の重ね合わせとして図示しなさい。 $D(z)$ 、 $R(z)$ 、および $H(z)$ の構造について巡回型か非巡回型か答えなさい。また、これら3つのシステムの応答について FIR か IIR か答えなさい。

24 【Frequency Sampling Filters and Running Fourier Transform Filters】

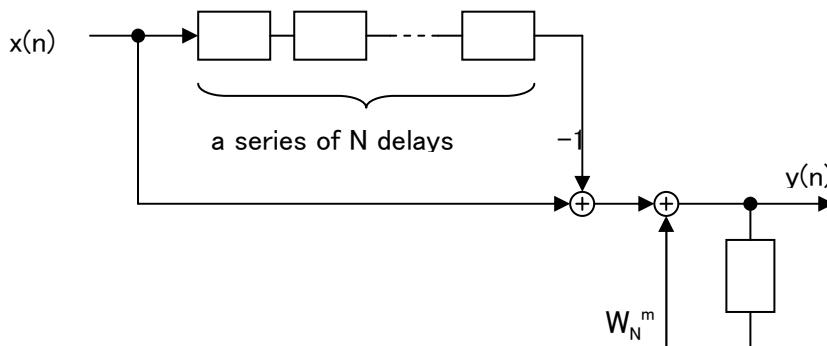
(They have been used to compute an approximate wavelet transform for vehicle engine control. H Kikuchi et al., 特許登録番号 2764495)

$W_N = \exp(-j2\pi/N)$ と定めるとき、図示の離散時間システムを N 点周波数サンプリングフィルタという。伝達関数を答えなさい。極と零点の配置を図示しなさい。入力信号 $x(n)$ に対する出力応答 $y(n)$ を求めなさい。

一方、時刻 n における N 点離散フーリエ変換(DFT)の第 m 番目の成分を

$$X(n, m) = \sum x(n-k) W_N^{mk} \text{ over } k=0 \text{ to } N-1$$

と定義することにしよう(これをランニング DFT という)。 $y(n) = X(n, m)$ であることを確認しなさい。



25 【Cyclotomic Polynomials, 円分多項式】 $z^N - 1 = \prod C_k(z)$ with respect to k such that $k|N$, that is, k is a divisor of N . The other definition is as follows. $C_k(z) = \prod (z - W_k^m)$ w.r.t. m such that $(m, k) = 1$, that is, m and k are mutually prime, and $W_k = \exp(-j2\pi/k)$. 円分多項式 $C_k(z)$ の係数は $0, +1, -1$ に限られることが知られている。では、 $k=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 101$ の場合について $C_k(z)$ を陽に書き下しなさい。

26 【The Jumping Painter Problem, 跳びこしペンキ屋問題; P. P. Vaidyanathan】 円周上に N 個の物体が置いてある。ペンキ屋さんは 1 回に物体 1 つだけにペンキを塗ることになっている。そこでペンキ屋さんは、「順番に塗ってゆくのは芸が無くてつまらない。 M 個おきに塗ってゆく」ことにした。さてさて、実は全部塗り終えられる場合とまだ塗り終わらないうちに最初の物体に戻ってしまい、永久に塗り終えられない場合があることを知らないらしい。ちゃんと全部塗り終えることができるための必要十分条件をおしえてください。

27 【Bilinear z -Transformation】 双1次 z 変換 $s = 2(z-1)/(z+1)$ は 2 つの複素平面上の点を 1 対 1 に写像する。また、それは等角写像であり、円を円に写像する。ただし、無限に長い直線は半径無限大の円と考えるものとする。 s 平面上の点 $s=0, s=-2, s=2, s=\infty$ と虚軸、ならびに左半平面が z 平面上の点や図形としてどのように写像されるか図示しなさい。また、 $s=j\Omega, z=\exp(j\omega)$ とおくとき、2 つの角周波数 Ω と ω の関係式を求め、図示しなさい。

略解

$$s=0 \Leftrightarrow z=1, \quad s=-2 \Leftrightarrow z=0, \quad s=2 \Leftrightarrow z=\infty, \quad s=\infty \Leftrightarrow z=-1, \quad \operatorname{Re}[s]=0 \Leftrightarrow |z|=1, \quad \operatorname{Re}[s]<0 \Leftrightarrow |z|<1$$

$$\frac{j\Omega}{2} = \frac{e^{j\omega/2}(e^{-j\omega/2} - e^{-j\omega/2})}{e^{j\omega/2}(e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2})} = \frac{j \sin(\omega/2)}{\cos(\omega/2)} \quad \therefore \frac{\Omega}{2} = \tan \frac{\omega}{2}$$

28 【FFT】以下は8点のデータ系列 $\{x(n), n=0, 1, 2, \dots, 7\}$ に対する高速離散フーリエ変換(FFT)の時間間引きアルゴリズムの説明したものである。文中の[a]～[j]を埋めなさい。

8点のデータであるから、離散フーリエ変換の定義式

$$X(k) = \sum x(n)W_8^{kn} \text{ over } n=0 \text{ to } 7, \quad W_8 = \exp(-j2\pi/8)$$

において k は $k=0, 1, 2, \dots, [a]$ の値をとる。いま、 $\{x(n)\}$ を分割して、[b]番目と[c]番目の2組のデータを作り、

$$X_E(k) = \sum x(2m)W_4^{km} \text{ over } m=0 \text{ to } [d], \quad k=0, 1, 2, 3$$

$$X_O(k) = \sum x([e])W_4^{km} \text{ over } m=0 \text{ to } [d], \quad k=0, 1, 2, 3$$

と定義する。 $W_4 = \exp(-j2\pi/4)$ であり、 $W_4 = W_8^2$ であるから、 $[X(k), k=0, 1, 2, 3]$ については

$$X(k) = X_{[f]}(k) + W_8^k X_{[g]}(k), \quad k=0, 1, 2, 3$$

とかけることが分かる。 $[X(k), k=4, 5, 6, 7]$ については、 $W_8^{k+4} = W_8^k W_8^4 = -W_8^k$ であるから

$$X(k+4) = X_{[h]}(k) - W_8^k X_{[i]}(k), \quad k=0, 1, 2, 3$$

とかけることが分かる。引き続き、 $\{X_E(k)\}, \{X_O(k)\}$ に対しても同様に変形を繰り返すと、バタフライ演算だけから構成される計算法が得られる。ただし、入力データの並びはビット逆順にしなければならない。すなわちビット逆順とは、3ビットの2進数をABCと表現するとき、上位ビットと下位ビットを互いに交換してCBAとし、これをあらためて2進数として読み出すことにはかならない。具体的に数列 $[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$ に対してビット逆順をおこなって得られる数列は[j]となる。

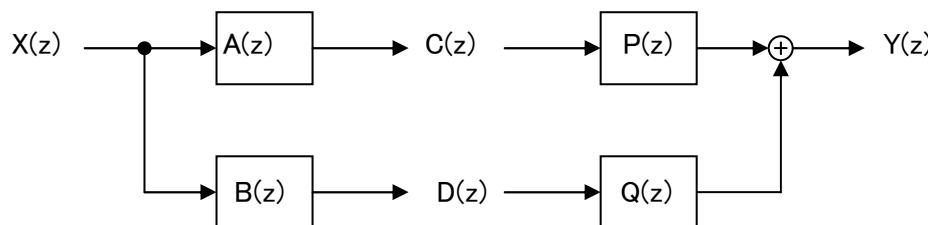
答え [a] 7 [b] 偶数 (even) [c] 奇数 (odd) [d] 3 [e] $2m+1$ [f] E [g] O [h] E [i] O [j] 0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7

natural order: 000 001 010 011 100 101 110 111

reversed order: 000 100 010 110 001 101 011 111

29 【Filter Banks and the Haar Transform】 z 変換領域で図示のように表される離散時間システムを考える。4つのデジタルフィルタ $A(z), B(z), P(z), Q(z)$ の間には $B(z)=P(-z), Q(z)=-A(-z)$ が成立している。いま $A(z)=(1+z^{-1})/2, P(z)=(1+z^{-1})/2$ と定めるとき、2つの中間出力 $C(z), D(z)$ は入力 $X(z)$ によってどのように表されるか答えなさい。また出力 $Y(z)$ は $C(z)$ と $D(z)$ によってどのように表されるか答えなさい。最後に $Y(z)$ を $X(z)$ で書き表しなさい。

-Legend: C implies the coarse component and D implies the detail component.-



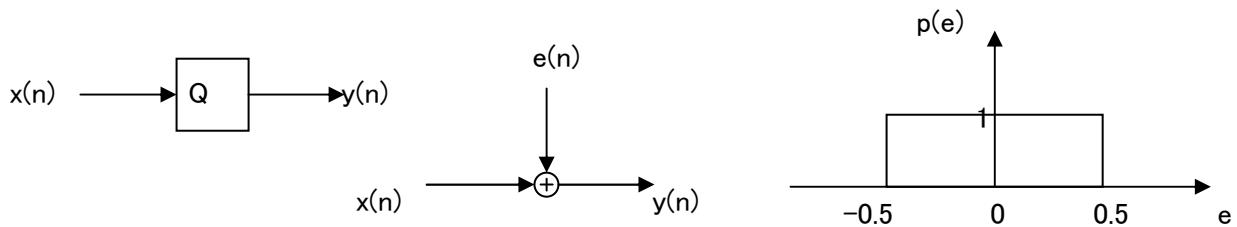
答え

$$C(z) = X(z) (1+z^{-1})/2$$

$$D(z) = X(z) (1-z^{-1})/2$$

$$Y(z) = C(z)P(z) - D(z)A(-z) = X(z) [(1+z^{-1})/2] [(1+z^{-1})/2] - X(z) [(1-z^{-1})/2] [(1-z^{-1})/2] = z^{-1}X(z)$$

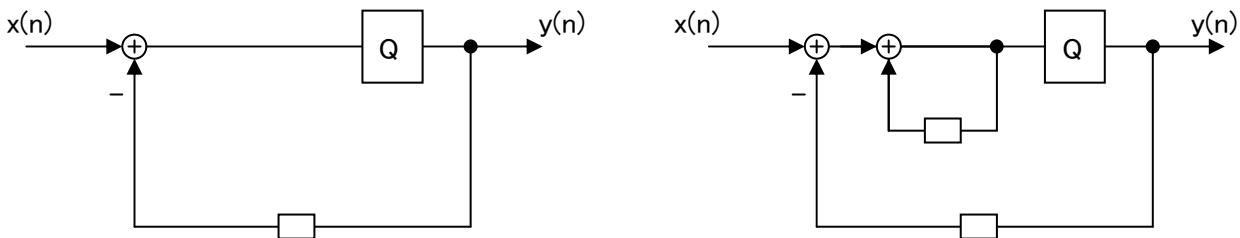
30 【Quantization Error】量子化では量子化誤差 $e(n)$ が発生する。実数値の入力 $x(n)$ を丸めて整数 $y(n)$ を出力する一様量子化器は図のようなモデルで表される。 $e(n)$ は不規則信号で、 $e(n)$ の生起確率は右図のような確率密度関数(pdf, probability density function)で表される。 $e(n)$ の平均値と分散を計算しなさい。



答え: x の期待値(集合平均)を $E[x]$ とかく。 $E[e] = \int_{-\infty}^{\infty} ep(e)de = \int_{-0.5}^{0.5} ede = 0$

分散は2乗したものの期待値だから、 $E[e^2] = \int_{-\infty}^{\infty} e^2 p(e)de = \int_{-0.5}^{0.5} e^2 de = \frac{e^3}{3} \Big|_{-0.5}^{0.5} = \frac{1}{12}$

31 【 $\Sigma \Delta$ Modulation and Noise Shaping, シグマデルタ変調(右図)と雑音スペクトル整形】図のような2つのシステムについて、出力応答 $y(n)$ の z 変換をそれぞれ求めなさい。ただし量子化器のモデルは前問参照。入力信号の帯域幅は標本化周波数にくらべて十分狭く、 $E[x^2(n)] = 1$ とする。量子化誤差については $E[e^2(n)] = 0.01$ とする。このとき、それぞれの出力応答のスペクトルを描き、両システムを比較検討しなさい。



略解 Note that the numerator of a transfer function is given by a forward-pass gain, and the denominator is given by “one minus the loop gain.” したがって、

左のシステムでは、 $Y(z) = X(z)/(1+z^{-1}) + E(z)/(1+z^{-1})$

右のシステムでは、 $Y(z) = [X(z)/(1-z^{-1})]/[1 + z^{-1}/(1-z^{-1})] + E(z)/[1 + z^{-1}/(1-z^{-1})] = X(z) + (1-z^{-1})E(z)$

直流(単位円上の $z=1$)付近では第2項が小さいので、 $Y(z) \approx X(z)$ 。つまり量子化誤差がほぼ消える。

一方、 $z=-1$ 付近、つまり高周波領域では、 $Y(z) \approx X(z) + 2E(z)$ ですから量子化誤差が2倍になります。量子化誤差を消し去ることはできない相談ですが、低周波領域から高周波領域へ追い払っているのです。したがって、もしも信号帯域が低周波付近にしか存在しなければ、その信号帯域付近だけを取り出すことにより、量子化誤差の影響を逃れることができます。この右のシステムをシグマデルタ変調器といいます。

$\Sigma \Delta$ 変調は高性能ADコンバータ、DAコンバータに使用されます。これは当時東京大学大学院生だった猪瀬博先生(文化勲章受章)と指導教官の安田先生の研究です。偉大な業績です。

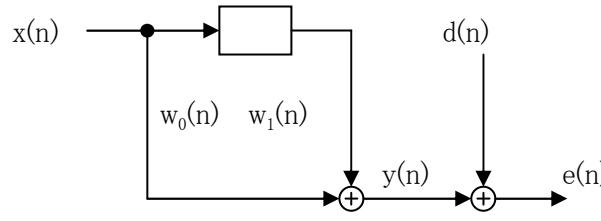
H Inose and Y Yasuda, A unity bit coding method by negative feedback, Proc. IEEE, pp. 1524–1533, Nov. 1963.

32 図の適応フィルタにおいて定常入力信号 $x(n)$ と目標信号 $d(n)$ に関する統計量(相關関数)が

$$E[x^2(n)] = E[x^2(n-1)] = 1, \quad E[x(n)x(n-1)] = 0.5, \quad E[d^2(n)] = 4,$$

$$E[d(n)x(n)] = -1, \quad E[d(n)x(n-1)] = 1$$

であるとき、以下の間に答えなさい。ただし、 $E[\cdot]$ は期待値(Expectation Value)をあらわす。



(1) 誤差 $e(n) = d(n) - y(n)$ の2乗平均値を $\varepsilon = E[e^2(n)]$ と定義する。 ε をフィルタ係数 $w_0(n)$, $w_1(n)$ の2次関数として表しなさい。

(2) 勾配ベクトルを $\nabla = [\partial \varepsilon / \partial w_0(n), \partial \varepsilon / \partial w_1(n)]^T$ と定義して、 $\nabla = 0$ となる収束状態における適応フィルタ係数を求めなさい。ただし、肩字 t は転置(transposition)をあらわす。

(3) 2乗平均誤差 ε の最小値を求めなさい。

(4) $\{x(n)\} = 2, -1, 3, -3, 0, 1, \dots$, $d(n) = 0$ for all n とする。2つの適応アルゴリズム、

LMS: $w_k(n+1) = w_k(n) + 0.1 \cdot e(n) x(n-k)$,

Clipped LMS: $w_k(n+1) = w_k(n) + 0.1 \cdot e(n) \text{sgn}[x(n-k)]$,

where $\text{sgn}[x] = +1$ for $x > 0$, $\text{sgn}[x] = 0$ for $x = 0$, $\text{sgn}[x] = -1$ for $x < 0$

について適応開始直後、具体的には時刻 $n=0, 1, 2$ における適応フィルタ係数を求めなさい。ただし、適応フィルタ係数の初期値は $w_0(n) = w_1(n) = 1/2$ であり、遅延器の初期状態は零であるとする。

33 画像の信号処理について考えよう。[] の中の適当な言葉を選択し、文章を完成しなさい。

画像処理について空間領域での処理と周波数領域での処理について考える。画像は被写体をなんらかの①{映像、想像、撮像、実像}装置で映像化して得られる。これをデジタル画像にするにはまず②{低域通過デジタルフィルタ、帯域通過デジタルフィルタ、低域通過アナログフィルタ、帯域通過アナログフィルタ}によって帯域制限した後、③{量子化、符号化、標本化、平滑化}によって④{不連続な、連続な、離散的な、整数値の}データの集合に変換する。ひきつづき、個々のデータの値を⑤{量子化、符号化、標本化、平滑化}する。前者は画像の⑥{頻度、解像度、輝度、感度}を定め、後者は⑦{頻度、解像度、輝度、感度}を定める。こうして画像は数値の配列として表され、この配列要素を画素という。

3種類の画像、日の丸(日本国旗)、市松模様(白と黒の正方形を交互に敷き詰めたチェス盤模様)、ごま塩模様(salt and pepper noise-like texture)を考えよう。これらのうち低周波成分が最も支配的な画像は⑧{日の丸、市松模様、ごま塩模様}であろう。また、⑨{階調、幾何学的、フーリエ、カルフーネン・レーべ}変換をおこなうと画像に含まれる周期構造を調べることができるが、最も明瞭な周期構造は⑩{日の丸、市松模様、ごま塩模様}で観測されると考えられる。

34 【2D 予測フィルタ】入出力関係が $y(m,n) = x(m-1,n) + x(m, n-1) - x(m-1, n-1)$ とかける2次元デジタルフィルタがある。伝達関数を求めなさい。画像処理において、このフィルタの働きを説明しなさい。

こたえ: $X(z_1, z_2) = \sum_m \sum_n x(m, n) z_1^{-m} z_2^{-n}$ と定義すると、

$$Y(z_1, z_2) = X(z_1, z_2)(z_1^{-1} + z_2^{-1} - z_1^{-1}z_2^{-1})$$

The transfer function is the second factor in the right hand side of the above equation. It is a prediction filter and the value at P is predicted by three pels in the form of A+C-B.

$$\begin{array}{cccc} \cdots & B & C & \cdots \\ \cdots & A & P & \cdots \end{array}$$

35 { }の中の適当な言葉を選択し、文章を完成しなさい。また、問⑤を解答しなさい。

スペクトルは連続的か離散的か、周期的か非周期的かで4種類に分類される。一般に、孤立連続波形のスペクトルは非周期的連続スペクトルである。また、周期的波形は①{フーリエ級数、フーリエ変換、離散フーリエ変換、高速フーリエ変換}で展開されるから、②{連続、離散、周期的、非周期的}スペクトルとなる。一方、連続時間信号の③{量子化、符号化、標本化、部分分数展開、フーリエ変換}によって得られる離散時間信号のスペクトルは④{連続的、離散的、周期的、非周期的}である。では、⑤いかなる波形が周期的離散スペクトルを有するか答えなさい。

36 【うなり, beats】2つの正弦波の和 $x(n)=\sin 2\pi f_1 n + \sin 2\pi f_2 n$, $f_1=17.6\text{kHz}/44\text{k}$, and $f_2=26.4\text{kHz}/44\text{k}$ で表される $x(n)$ を三角関数の積の形に変形し、 $x(n)$ の波形を描きなさい。ヒトの可聴帯域は 20kHz といわれている。あなたは 44kHz 程度の標本化で十分だと思いますか。理由を述べなさい。

菊之介の答え: 確かに、トーン(単音、單一周波数の音)としてはヒトの聴覚は20kHz 以上の音を知覚しないとされている。しかし、我々はうなりを聴く時、音が大きくなったり小さくなったりすることを知覚する。このような強弱の変化は2つの単音が重ねあわされたときに発生し、単音だけが存在している場合には発生しない。したがって、44kHz の標本化では不十分と考えられる。たとえば周波数が 25.4kHz と 24.0kHz の2つの超音波を同時に聴いて実験してみたいと思う。700Hz の音が聞こえるはずである。

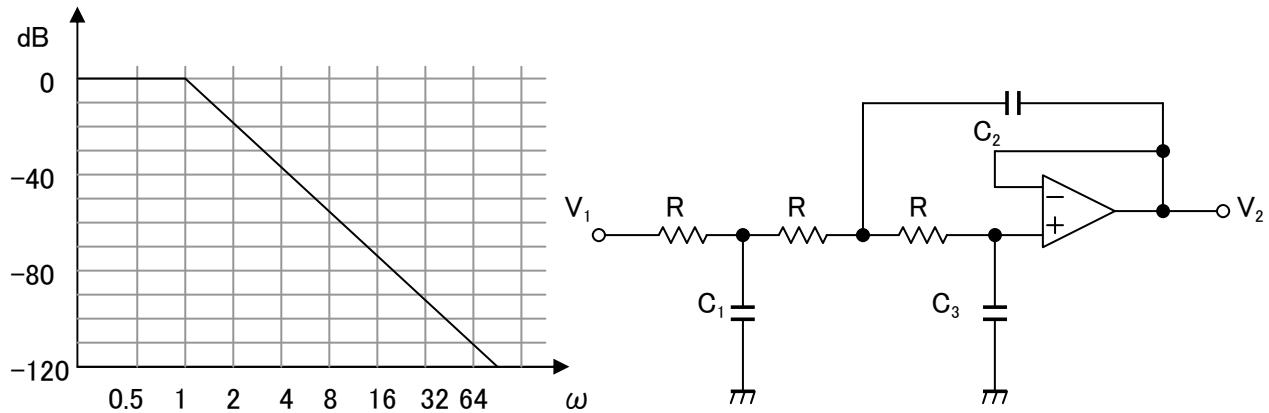
37 【Windowed Fourier transforms or short-time Fourier transforms are one of possible ways in time-frequency analysis, 窓掛けフーリエ変換、短時間フーリエ変換、時間周波数解析】窓関数 $w(t)=1$ if $|t|<T$, else $w(t)=0$ を複素指數関数に乘じて正弦波の一部分を切り出した波形との内積によって窓掛けフーリエ変換

$$F_{\text{WT}}(\omega, b) = \langle w(t-b)\exp(j\omega t), x(t) \rangle$$

を定義する。基底関数のフーリエ変換を計算し、そのスペクトルを描きなさい。スペクトルの主ピークの幅(resolution)、および主ピークと第2ピークの高さの比(spectral leakage suppression ratio)はそれぞれいかが答えなさい。このような窓掛けフーリエ変換がなぜ有用であるか検討しなさい。

38 【Design of Anti-Aliase Analog Lowpass Filters】 3次 Butterworth アナログ低域通過フィルタの伝達関数は、 $V_2/V_1=1/(s+1)(s^2+s+1)$ で与えられる。一般に N 次最大平坦(maximally flat)特性の振幅2乗関数は $1/[1+(-s^2)^N]$ であり、分母の根は $s=\exp[j\pi(N-1+2k)/2N]$ である。すなわち、安定な N 次バターワースフィルタの極は s 平面の原点を中心とする円周上に存在し、かつ左半平面に存在する。

左図の3次最大平坦振幅2乗特性より遮断域は $-6 \times 3 = -18\text{dB/octave}$ で減衰することが分かる。また、3次 Butterworth アナログ低域通過フィルタは右図の回路で構成することができる。素子値は $C_1=1.3926[\text{F}]$, $C_2=3.5468[\text{F}]$, $C_3=0.2025[\text{F}]$ と与えられる。抵抗 R の値は適当に定めればよい。



アンチエイリアスフィルタとして使用するには、入力信号の帯域幅とフィルタの周波数特性とを勘案して標本化周波数 f_s を定める必要がある。少なくとも周波数 $f_s/2$ 付近において、入力信号に含まれ得る不要スペクトルを十分に減衰させることが必要である。こうして実際のフィルタの3dB 遮断周波数 f_c が定められる。すると、実際のキャパシタの値は $C_n/2\pi f_c R$ と求まる。

いま、この3次 Butterworth フィルタをアンチエイリアスフィルタに使用するものと仮定する。では、標本化周波数 f_s を 16kHz とし、 $f_s/4$ で SNR を 30dB 程度確保したいとき遮断周波数 f_c はいかほどにすべきか答えなさい。このとき、 $R=10\text{k}\Omega$ と選んで、キャパシタの値を定めなさい。

39 【High-Input Impedance/High-CMRR Amplifiers】 電圧増幅を目的とする高 CMRR(同相除去比)増幅器として電流加算型の差動増幅回路が賞用される。被増幅対象がシングルエンド出力の場合には差動増幅回路の一方の入力端子を接地して使用すればよい。このような目的に合致する回路を書籍、藤井信生著、アナログ電子回路、昭晃堂の中から見つけ出しなさい。 答え 166 頁。

菊之介のひとりごと： いやー、つられた。一生懸命、勉強になる問題をつくった。ぜんぶ解いたら、たいしたもんだ。実力がつくぞー。挑戦と反応を期待してるよ。

40 【Shielding against Inductive Noise】 { } 中の語句を選択し、文章を完成しなさい。

計測対象の出力インピーダンスが高い場合、計測対象から計測器等の間を接続する配線に誘導性雑音などが重畳し、悪影響をまねくことが少なくない。雑音の影響をできるだけ排除するには、配線を ①[短く、長く] するだけでなく、配線を ②[導体、半導体、絶縁体、鋼鉄、エナメル] で覆ってシールドし、このシールドの電位をしっかりと ③[低、高] インピーダンスの部位に確定しておくことが効果的である。通常はシールド部材を ④[1点、2点、等間隔にできるだけ多くの点] で接地する。

なお、シールドの必要がない場合でも、2本の配線で測定対象に接続する場合には両配線の ⑤[長さ、直径、重さ] を揃え、互いに ⑥[よじり合わせて、一定間隔を保って、別経路をとるようにし]、たとえ誘導雑音が混入してもできるだけ両線に ⑦[同一の、逆の、1/4 波長だけ位相がずれた] 効果となるように措置し、信号受端部に⑧[電動、差動、非線形、負帰還] 増幅回路を使用して ⑨[キャンセル、補償、増幅、帰還] するようにするとよい。

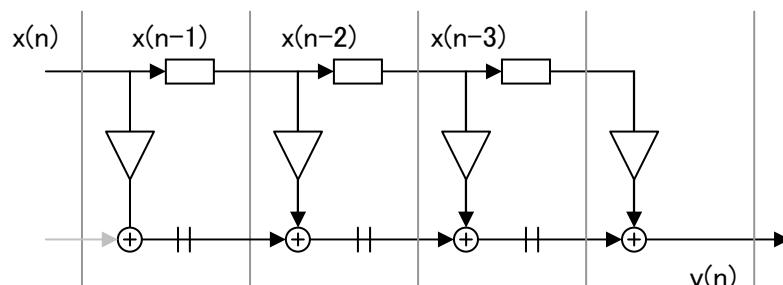
また、高インピーダンス部分に関する配線の途中にスイッチを挿入したい場合もある。通常、機械式スイッチは金属導体の機械的接触によって導体が接続するようになっている。しかしながら、導体の機械的接触が電気的導通を意味するとは限らない。テスターでスイッチの導通を確認しても、実際の回路の中では電気的導通が確保されないことがある。つまり、⑩[十分な電流が流れること、電位差が十分に小さいこと] が導通の意味であり、同電位であることだけで導通が確保されるわけではない。いずれにしても、測定対象のインピーダンスが ⑪[高い、低い、そこそこの]場合には十分な配慮が肝要である。

周波数が高い場合にも配線や回路部品、装置、人体等の配置関係などが浮遊素子となって計測対象や計測器と相互作用を働き、悪影響を生じることが多いので、シールド等に注意しなければならない。

なお、周波数が低くてもほかの問題がある。それは ⑫[温度、場所、時間、地球の自転、潮の干満] による回路・デバイスパラメータの変動であり、また ⑬[オフセット(offset)、カットセット(cutset)、タイセット(tie-set)、カセット(cassette)、アップセット(upset)] の影響などである。

集積回路は微細化と⑭[大電力化、高電圧化、低電圧化] が著しい。このため、⑮[静電気、交流、直流] による絶縁破壊に極めて弱い。集積回路を用いた回路製作に際しては、回路基盤や筐体を接地すると同時に、手首などに導電性リングを着用し、これを導線で接地したうえで回路に触るようになること。人体が集積回路に静電気を与えることがないようにしなければならない。なるべく合成化学繊維の衣服着用を避けることもお勧めである。

41 【パイプライン処理、Pipeline Processing】 It's a tradeoff between time and money; money implies hardware and chip area in LSI. If N separate processing units and several latches are available, processing delay will reduce in a fraction of N . Explain the pipeline operation in the following diagram. Power consumption can stay constant. However, the demand for pipeline usually arises in fast operation, and fast operation will lead to higher power dissipation, because P is given by $CV^2f/2$, where C , V , and f stand for the total capacitance, supply voltage, and switching frequency of the circuit, respectively. Let C , V , and f be $10nF$, $3V$, $100MHz$. Estimate the power consumption.



略解 平均消費電力は $P = (1/2)CV^2f = 0.5 \times 10n \times 9 \times 100M = 4.5$ [Watt]

42 【並列処理、Parallel Processing】 It's quite straightforward, if you study M-channel polyphase representation of digital filters that is advanced topics. As for IIR filters, a simple solution is the parallel structure found by a partial fraction expansion. Realize $H(z)=0.025(1+2z^{-1}+z^{-2})/(1-1.3z^{-1}+0.4z^{-2})$ in the parallel structure.

略解 分母は $(1-0.8z^{-1})(1-0.5z^{-1})$ と因数分解される。

$$\text{Res}(0.8) = (1-0.8z^{-1})H(z) |_{z=0.8} = 5.0625/24$$

$$\text{Res}(0.5) = (1-0.5z^{-1})H(z) |_{z=0.5} = 9/24$$

$$H(z) = (0.025/24) \{ 5.0625/(1-0.8z^{-1}) + 9/(1-0.5z^{-1}) \}$$

43 【Scaling Rules in MOS LSI, Mead and Conway】 Let L , W , and D be the length, width, and depth of the oxide layer of a gate of MOS transistors. Let $V = V_{gs} - V_{th}$. Here are five major parameters. The symbol $\hat{=}$ should be read in "is proportional to."

$$\text{Time constant, } T \hat{=} L^2/V$$

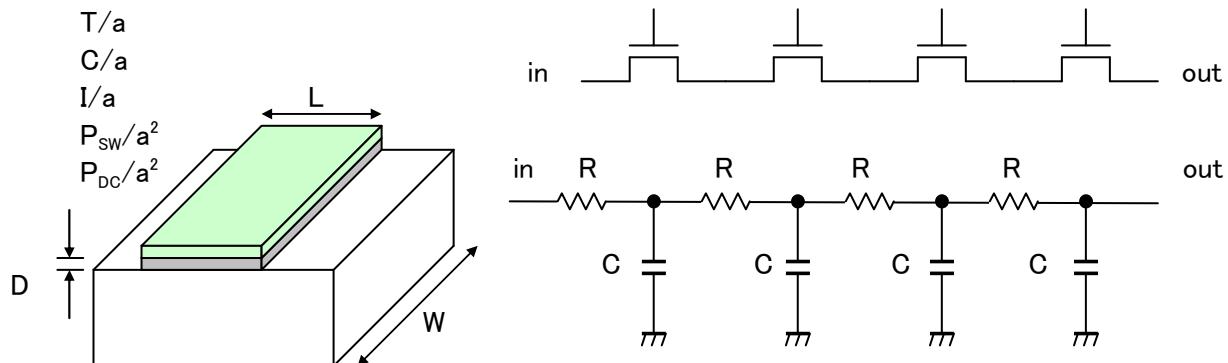
$$\text{Capacitance, } C \hat{=} LW/D$$

$$\text{Current, } I \hat{=} WV^2/LD$$

$$\text{Power dissipation in switching circuits, } P_{sw} \hat{=} CV^2/T \hat{=} WV^3/LD$$

$$\text{Power dissipation in static circuits, } P_{dc} \hat{=} IV \hat{=} WV^3/LD$$

Assume that all dimensions are scaled down by a constant factor a as same as the voltage so that all electric fields in the circuit will remain constant. Then those major parameters vary as follows.



A series connection of n pass transistors is modeled by an RC ladder circuit. Thus the total delay through one section is given by $RCn^2 + T_{inv}$, where T_{inv} is the switching delay of an inverter. The average delay per pass transistor is $RCn + T_{inv}/n$ and this is minimized by a particular n such that $RCn = T_{inv}/n$. What is the key to low power circuits?

Brief Answer:

Low V

Beside the voltage, narrow W , thick D , and long L lead to low power dissipation. However, long L gives a large capacitance and thus long delay.