

信号処理特論

菊池久和

新潟大学大学院自然科学研究科

電気情報工学専攻

2015



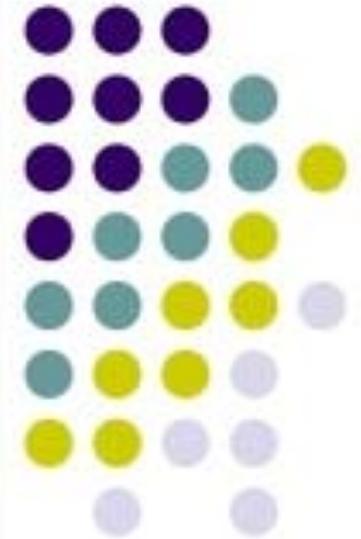
Abstract

信号処理特論

ベクトルや線形代数の枠組みを復習した後，サンプリング定理を復習します．

次のようなトピックスについて，演習問題を解いてゆくような形式で勉強します．

- マルチレート信号処理
… 複数の標本化速度が関与するシステム
- ポリフェーズ表現
- フィルタバンク
- AD変換
- 適応フィルタ入門



1 参考資料とか

- Googleサーチで **klab niigata** と2つのキーワードで検索する。
- KLabのホームページが見つかる。
- 左カラムにある小さな文字 **Lectures** をクリックする。

- 大学院の項にある **信号処理特論 (Advanced Topics in DSP)** をクリックする。
- 授業ノート **advDSPs.pdf**
- 補助教材 **dsp_brief.pdf**
- 以上2つのpdfをダウンロードし、各自プリントする。



2 関数はベクトルだ．信号はベクトルだ．

では，ベクトルは関数か？否．ベクトルの公理系を参照せよ．
集合 V がベクトル空間（または線形空間）であるとは，その任意の元を a, b, c, \dots と書くとき，次の公理を満たすこと．

1. スカラー倍: $\lambda a \in V$ for any scalar λ
2. 和: $a + b \in V$
3. 交換律: $a + b = b + a$
4. 結合律: $(a + b) + c = a + (b + c)$
5. 分配律: $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$
6. スカラー倍の結合律: $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$
7. スカラーの和の分配律: $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$
8. 零元の存在: $0 + a = a$, for $\forall a \in V$
9. 逆元の存在: $(-a) + a = 0$, for $\forall a \in V$

時間の関数 $x(t)$ を無限小時間間隔のサンプル値を羅列して表わしてもよい。

$$x(t) = \begin{pmatrix} \vdots \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

(注) 実はサンプル値のインデクス表記には問題がある。1, 2, 3, ... と数えることのできる加算無限とそうではない不加算無限の食い違いがある。だが、そこはお目こぼし願いたい。

3 平面上の点を基底系の線形結合でかく

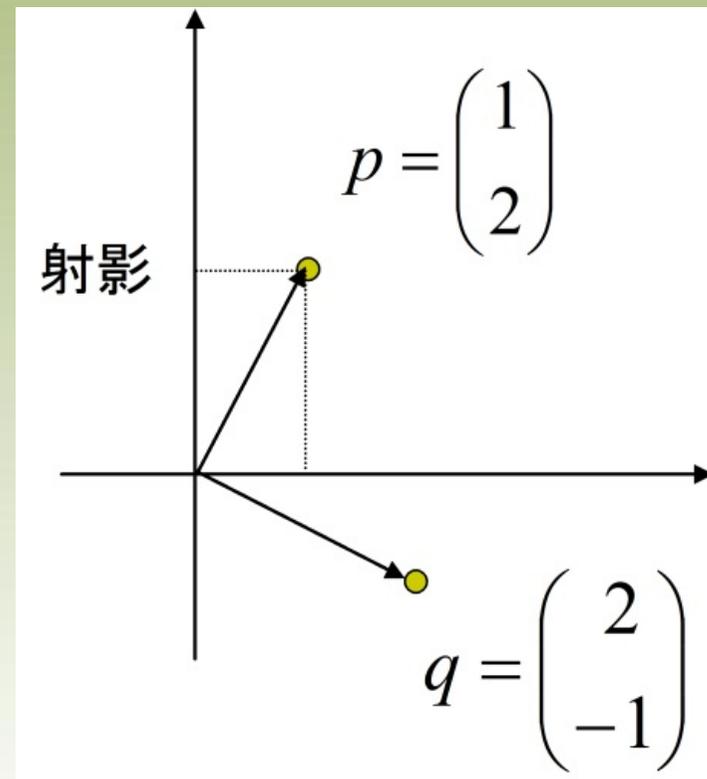
単位基底ベクトルを e_1, e_2 とかくとき,

$$p = P_1 e_1 + P_2 e_2$$

重み係数は p の基底ベクトルへの射影で定められる.

$$P_1 = \langle e_1, p \rangle = 1$$

$$P_2 = \langle e_2, p \rangle = 2$$



(補足) フーリエ変換では基底ベクトルが $e^{j\omega t}$ であり, 重みを計算する式がフーリエ変換に, 点 p を表記する式が逆フーリエ変換に対応する.

4 変換など

フーリエ級数

$$X_n = \frac{1}{T} \langle e^{j\frac{2\pi}{T}nt}, x(t) \rangle$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$$

フーリエ変換

$$X(\omega) = \langle e^{j\omega t}, x(t) \rangle$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

ラプラス変換

$$X(s) = \langle e^{st}, x(t) \rangle$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

z変換

$$X(z) = \langle z^n, x(n) \rangle$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz$$

(注) 複素数の寄せ集め(加算)を計算するには, 閉曲線で囲んで周回積分をつかう.
正負両方向の ∞ は同一ですね.

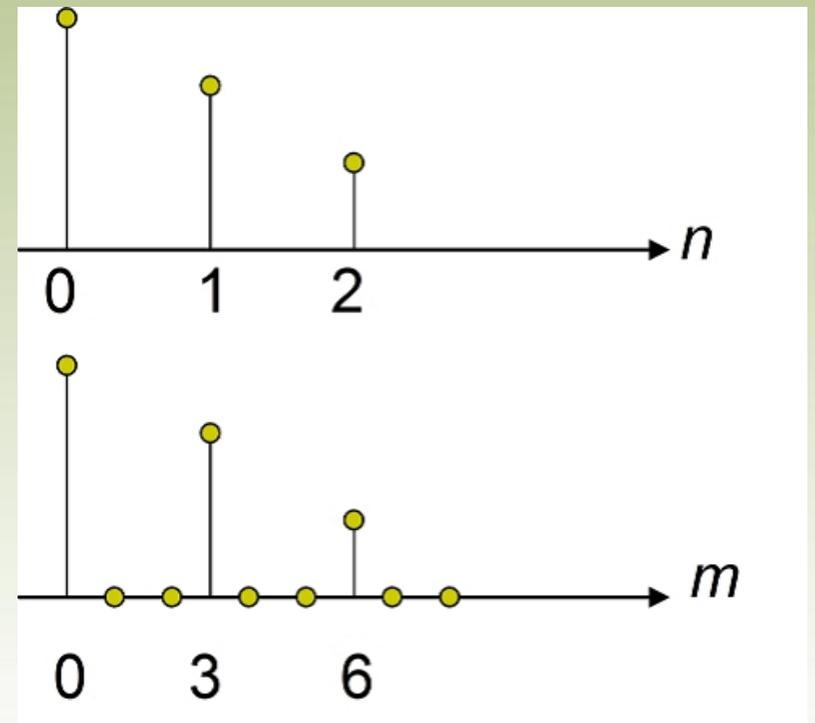
5 U 倍にアップサンプリング (補間)

$$y(m) = \begin{cases} x(\frac{m}{U}), & m \text{ が } U \text{ の倍数のとき} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x(n) \rightarrow \boxed{\uparrow U} \rightarrow y(m)$$

$y(m)$ の z 変換を求めよう。

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m)z^{-m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kU)z^{-kU} \\ &= \sum_k x(k) (z^U)^{-k} = X(z^U) \end{aligned}$$



6 $\frac{1}{D}$ にダウンサンプリング (間引き)

入力を D サンプルおきに抽出する .

$$y(m) = x(mD)$$

$D=3$ のとき , サンプル列 $x(n)$ を 3 つごとに区切る . 各組先頭サンプル以外をゼロにする .
つまり , 間引きパルス列 $p(n)$ を乗算する .

$$v(n) = x(n)p(n)$$

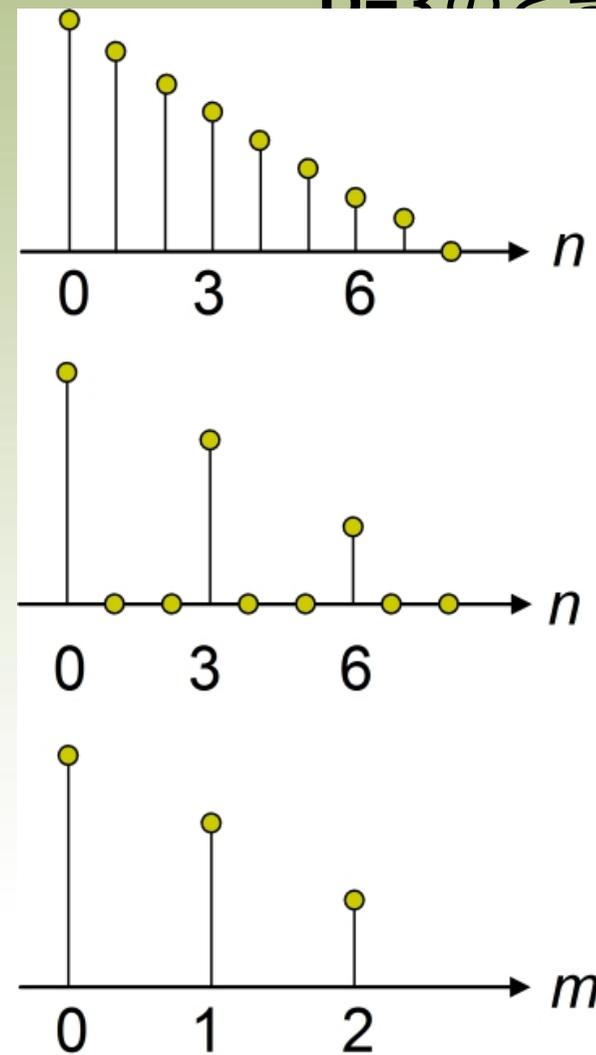
$p(n) = \sum_m \delta(n - 3m)$ は $n = 3m$ の所でだけ非零

で 1 の離散周期関数だから , 離散フーリエ級数により次のようにかける .

$$\begin{aligned} p(n) &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 P(k) W_3^{kn} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 \langle e^{j\frac{2\pi}{3}kn}, p(n) \rangle W_3^{kn} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 W_3^{kn}, \text{ where } W_3 = e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$x(n) \rightarrow \boxed{\downarrow D} \rightarrow y(m)$$

$D=3$ のとき



$$\begin{aligned}
 V(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)p(n)z^{-n} = \sum_n x(n) \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} W_D^{kn} z^{-n} \\
 &= \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} \sum_n x(n) (W_D^{-k} z)^{-n} = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(W_D^{-k} z)
 \end{aligned}$$

次に， $v(n)$ から $y(m)$ を作ることは，アップサンプリングの逆に相当するから， $Y(z) = V(z^{\frac{1}{D}})$ である．故に，

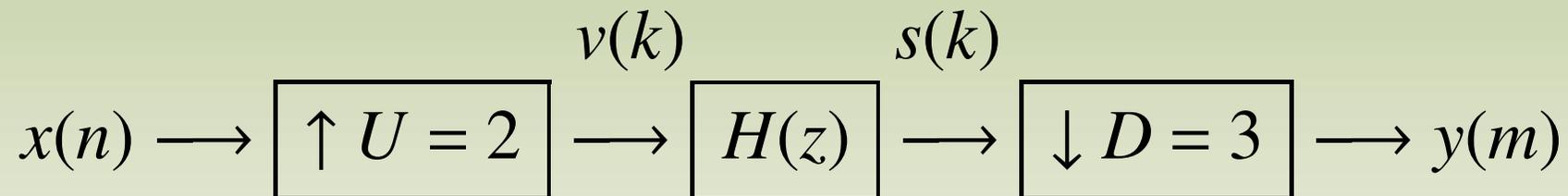
$$Y(z) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(W_D^{-k} z^{\frac{1}{D}}).$$

$k = 0$ 以外の項は原信号 $X(z)$ には存在しないもので，エイリアス成分という．また， $z^{\frac{1}{D}}$ となっているから，周波数帯域が D 倍に間延びした D 個の並進コピー成分が寄せ集められている．

ちなみに， $D = 2$ の場合は $W_D = -1$ であり， $Y(z) = \frac{1}{2} \left(X(z^{\frac{1}{2}}) + X(-z^{\frac{1}{2}}) \right)$ ．

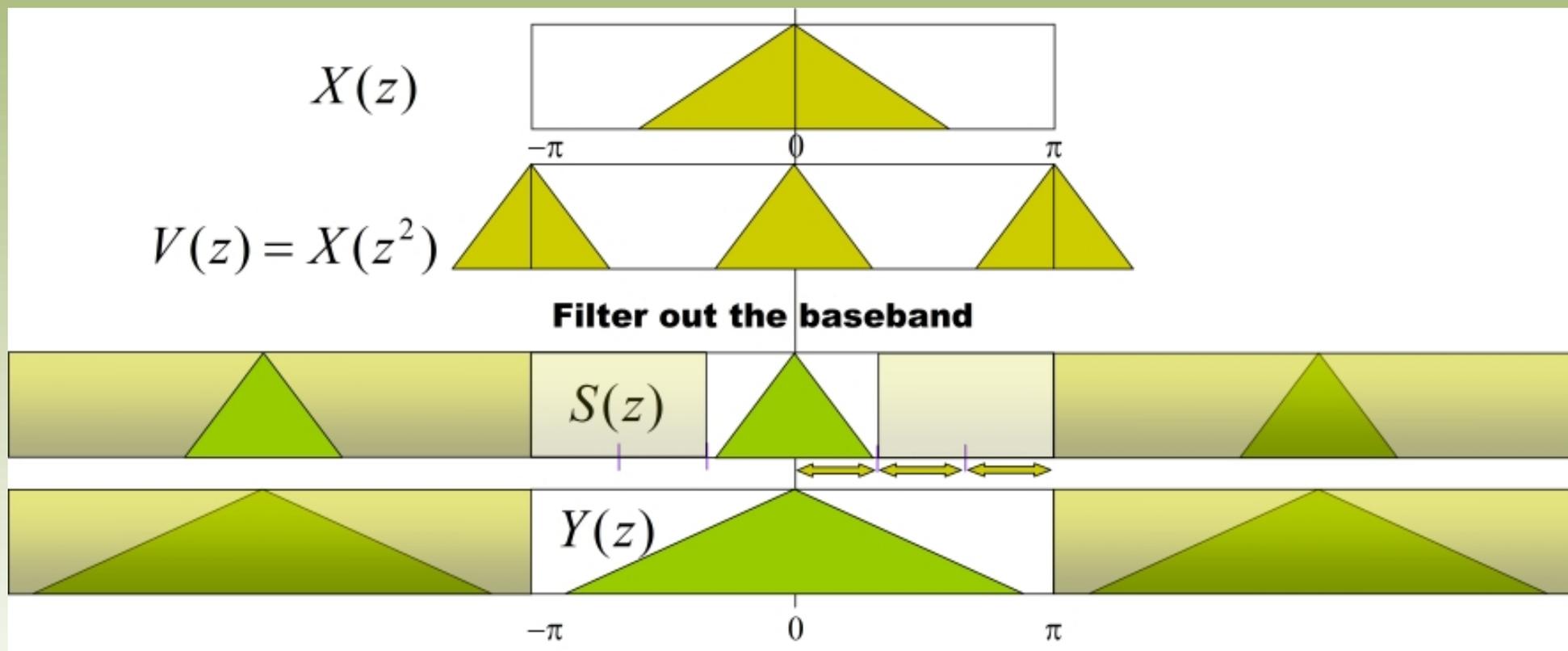
7 サンプリング速度を $\frac{U}{D}$ 倍に変更する

たとえば $\frac{U}{D} = \frac{2}{3}$ 倍に変更する．サンプルが3個入力されるたびに，2個のサンプルを出力するシステムを作ろう．単位時間あたりのサンプル数が原信号のサンプル数より減るから，低速で処理してもよいわけで，消費電力を低減できる．



遮断角周波数が $\frac{\pi}{D}$ の **LPF**（低域通過フィルタ） $H(z)$ を使用する． $U = 2, D = 3$ のとき， $x(n)$ の周波数スペクトルを適当に仮定して $v(k), s(k), y(m)$ のスペクトルを描きなさい．

8 サンプリング速度を $\frac{2}{3}$ 倍に変更すると



$$\begin{aligned}
 Y(z) &= \frac{1}{3} \left(S(z^{\frac{1}{3}}) + S(W_3^{-1} z^{\frac{1}{3}}) + S(W_3^{-2} z^{\frac{1}{3}}) \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(X(z^{\frac{2}{3}}) + X(W_3^{-1} z^{\frac{2}{3}}) + X(W_3^{-2} z^{\frac{2}{3}}) \right)
 \end{aligned}$$

9 サンプリング速度をたとえば $\frac{1024}{3}$ 倍に上げると

$\frac{U}{D} = \frac{1024}{3}$ 倍に上げると，単位時間あたりの出力サンプル数が原信号のサンプル数より増えるから，より高速な処理が必要になる．



しかし，極めて急峻な遮断特性を実現する場合とか，帯域通過型の周波数スペクトルを有する $x(n)$ をより高い周波数帯域に移動して周波数多重化をはかる場合（周波数ホッピング）などに使用される．

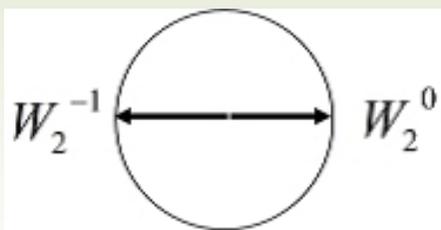
$U > D$ の場合には $H(z)$ の遮断角周波数を $\frac{\pi}{U}$ 以下に選ぶ．

10 間引きと補間の順序交換可能性について

2つのシステムは D と U が互いに素であるときに限って等価である。

$$x(n) \rightarrow \boxed{\downarrow D} \rightarrow \boxed{\uparrow U} \rightarrow y_1(m)$$

$$x(n) \rightarrow \boxed{\uparrow U} \rightarrow \boxed{\downarrow D} \rightarrow y_2(m)$$



【証明】 $D = 2, U = 3$ のとき

$$Y_1(z) = \frac{1}{2} \left(X((z^3)^{\frac{1}{2}}) + X(W_2^{-1} (z^3)^{\frac{1}{2}}) \right)$$

$$Y_2(z) = \frac{1}{2} \left(X\left(\left(z^{\frac{1}{2}}\right)^3\right) + X\left(\left(W_2^{-1} z^{\frac{1}{2}}\right)^3\right) \right)$$

集合 $\{W_D^{-k} | k = 0, 1, \dots, D-1\}$ の元は互いに異なる。しかるに、集合 $\{W_D^{-kU}\}$ は D と U が互いに素であるときに限って $\{W_D^{-k}\}$ に等しい。このとき、 $Y_1(z) = Y_2(z)$ であり、順序が交換可能である。

11 【復習】線形システムの応答は convolution

$$x(n) \rightarrow \boxed{h(n)} \rightarrow y(n) \quad \text{同じことだが} \quad X(z) \rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow Y(z)$$

線形並進不変システムのインパルス応答を $h(n)$ とかく。入力信号 $x(n)$ に対する出力応答 $y(n)$ は $h(n)$ と $x(n)$ のたたみこみで表わされる。

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k).$$

$x(n)$ の z 変換は

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

だから、入出力応答の両辺を z 変換すると、

$$Y(z) = H(z)X(z).$$

12 高貴な等価性 その1

2つのシステムは等価である。

$$x(n) \rightarrow \boxed{\downarrow D} \rightarrow \boxed{G(z)} \rightarrow y_1(m)$$

$$x(n) \rightarrow \boxed{G(z^D)} \rightarrow \boxed{\downarrow D} \rightarrow y_2(m)$$

$$Y_1(z) = G(z) \left(\frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(W_D^{-k} z^{\frac{1}{D}}) \right)$$

$$Y_2(z) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(W_D^{-k} z^{\frac{1}{D}}) G\left((W_D^{-k} z^{\frac{1}{D}})^D\right)$$

$$= \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(W_D^{-k} z^{\frac{1}{D}}) G(z)$$

13 高貴な等価性 その2

2つのシステムは等価である。

$$x(n) \rightarrow \boxed{G(z)} \rightarrow \boxed{\uparrow U} \rightarrow y_3(m)$$

$$x(n) \rightarrow \boxed{\uparrow U} \rightarrow \boxed{G(z^U)} \rightarrow y_4(m)$$

$$Y_3(z) = G(z^U)X(z^U)$$

$$Y_4(z) = G(z^U) \cdot X(z^U)$$

14 Polyphase表現

システムのインパルス応答を $\{h(n)\}$ とかくと，伝達関数は

$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}$ だ． $D=3$ の場合，3項ごとのブロックの連なりと見て，

$$\begin{aligned} H(z) &= h(0)z^{-0} + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} \\ &\quad + h(3)z^{-3} + h(4)z^{-4} + h(5)z^{-5} \\ &\quad + h(6)z^{-6} + h(7)z^{-7} + h(8)z^{-8} \\ &\quad + \dots \\ &= E_0(z^3) + z^{-1}E_1(z^3) + z^{-2}E_2(z^3) \\ &= \begin{pmatrix} E_0(z^3) & E_1(z^3) & E_2(z^3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ z^{-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

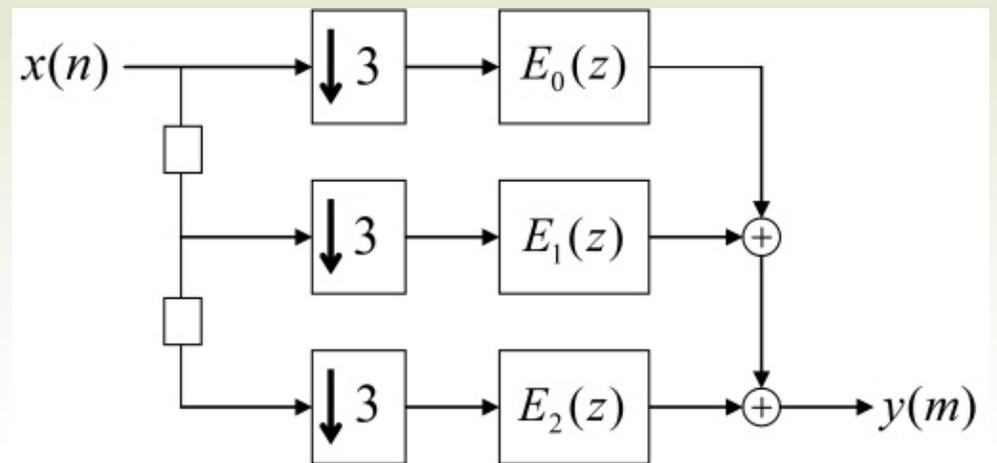
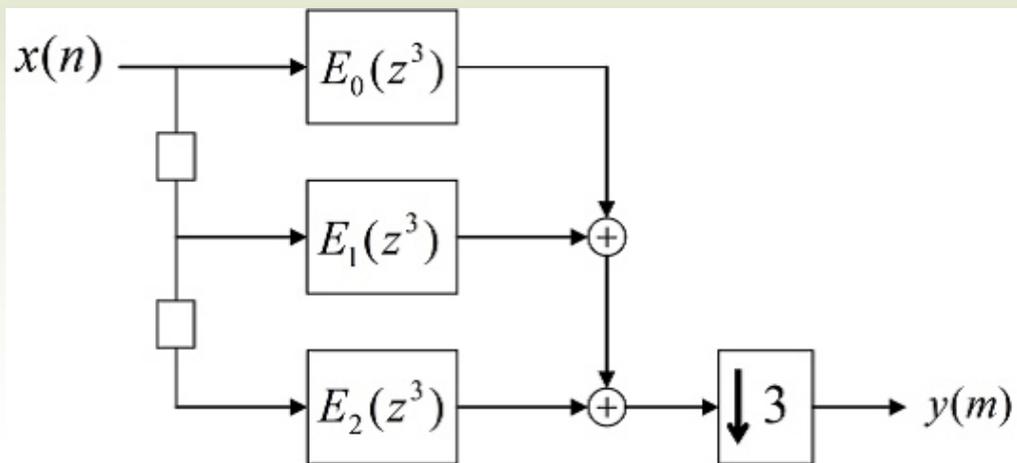
と表わす． $E_k(z)$ を $H(z)$ のポリフェーズ成分という．

15 デジタル信号のダウンサンプリング

すでにサンプリングレートの変更を学習した．ここでは，図示のシステムについて実際的で効率的なハードウェア構成をポリフェーズ表現を利用して誘導しよう．

$$x(n) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow \boxed{\downarrow 3} \longrightarrow y(m)$$

$D = 3$ だから， $H(z)$ の項を3つごとに区切ってポリフェーズ表現すると，左下の構成が得られる．図中，小さな四角形は単位遅延 z^{-1} を表わす．以後同様．末尾の間引きを先頭に移動すると右下の構成を得る．

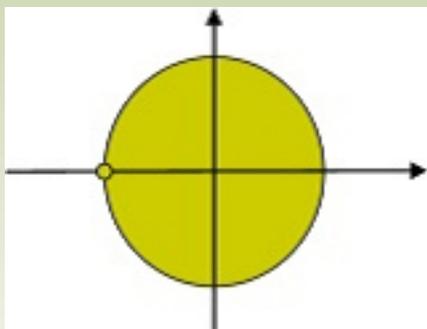


16 Halfband Filter 入門

インパルス応答の長さが偶数の直線位相FIRフィルタ(LPF)の伝達関数を $G(z)$ とかく . $G(1) = 1$, $G(-1) = 0$ であることも必要 . このとき

$$P(z) = G(1) + z^{-1}G(z^2)$$

と定義すると , $P(z)$ はハーフバンドフィルタとなる .

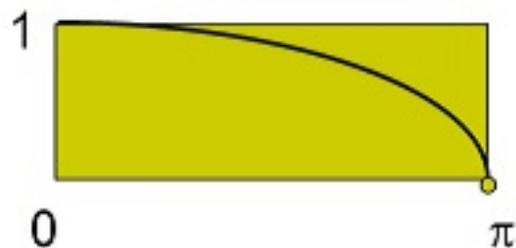


【証明】

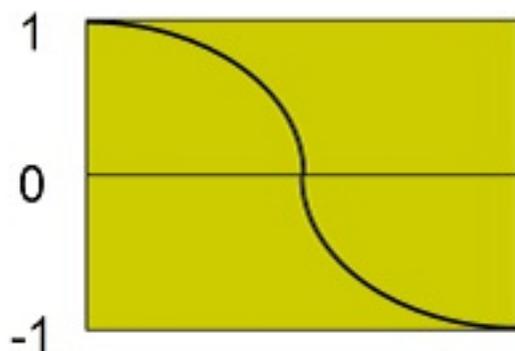
$$P(z) + P(-z) = 1 + z^{-1}G(z^2) + 1 - z^{-1}G(z^2) = 2.$$

17 ハーフバンドフィルタの周波数特性

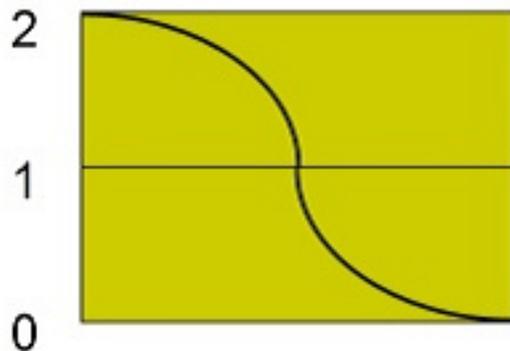
$$G(z) = \frac{1+z^{-1}}{2}$$



$$G(z^2) = \frac{1+z^{-2}}{2}$$



$$P(z) = 1+z^{-1}G(z^2)$$



- 左図は $G(z) = \frac{1+z^{-1}}{2}$ と選んだ場合である.
- 周波数特性は $\omega = \frac{\pi}{2}$ の点に関して点対称である.

18 ハーフバンドフィルタのインパルス応答

ハーフバンドフィルタ $H(z)$ は

$$H(z) + H(-z) = 2$$

を満足する．逆 z 変換して，インパルス応答を計算しよう．

$$H(z) + H(-z) \longleftrightarrow \begin{cases} h(n) + (-1)^n h(n) = 2h(n), & \text{if } n \text{ is even} \\ 0, & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

いっぽう， $2 \longleftrightarrow 2\delta(n)$ ．したがって，

$$h(2n) = \begin{cases} 1, & \text{for } n = 0 \\ 0, & \text{for } n \neq 0 \end{cases}$$

と定めておけばよい．つまり，ハーフバンドフィルタのインパルス応答は $n = 0$ を除いて， n が偶数の時刻で 0 である．

19 Halfband Filters Are a Class of Nyquist Filters

デジタルフィルタ $H(z)$ のポリフェーズ分解

$$H(z) = E_0(z^D) + z^{-1} E_1(z^D) + \cdots + z^{-(D-1)} E_{D-1}(z^D),$$

$$\text{where } E_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(Dn+k)z^{-k}, \text{ for } k = [0, D-1]$$

において, $E_0(z) = c = \text{const.}$ と仮定する. つまり, $h(0) = c$, および $h(Dn) = 0$, for $n \neq 0$ とする. いま $H(z)$ に対して周波数変換 $z \leftarrow zW_D^{-k}$ をほどこすと, $H(zW_D^{-k})$ たちは $H(z)$ を単位円上で $\frac{2\pi}{D}$ ラジアンずつ等間隔に移動したものである. したがって, これら D 個のフィルタを加算すると

$$H(z) + H(zW_D^{-1}) + H(zW_D^{-2}) + \cdots + H(zW_D^{-(D-1)}) = cD.$$

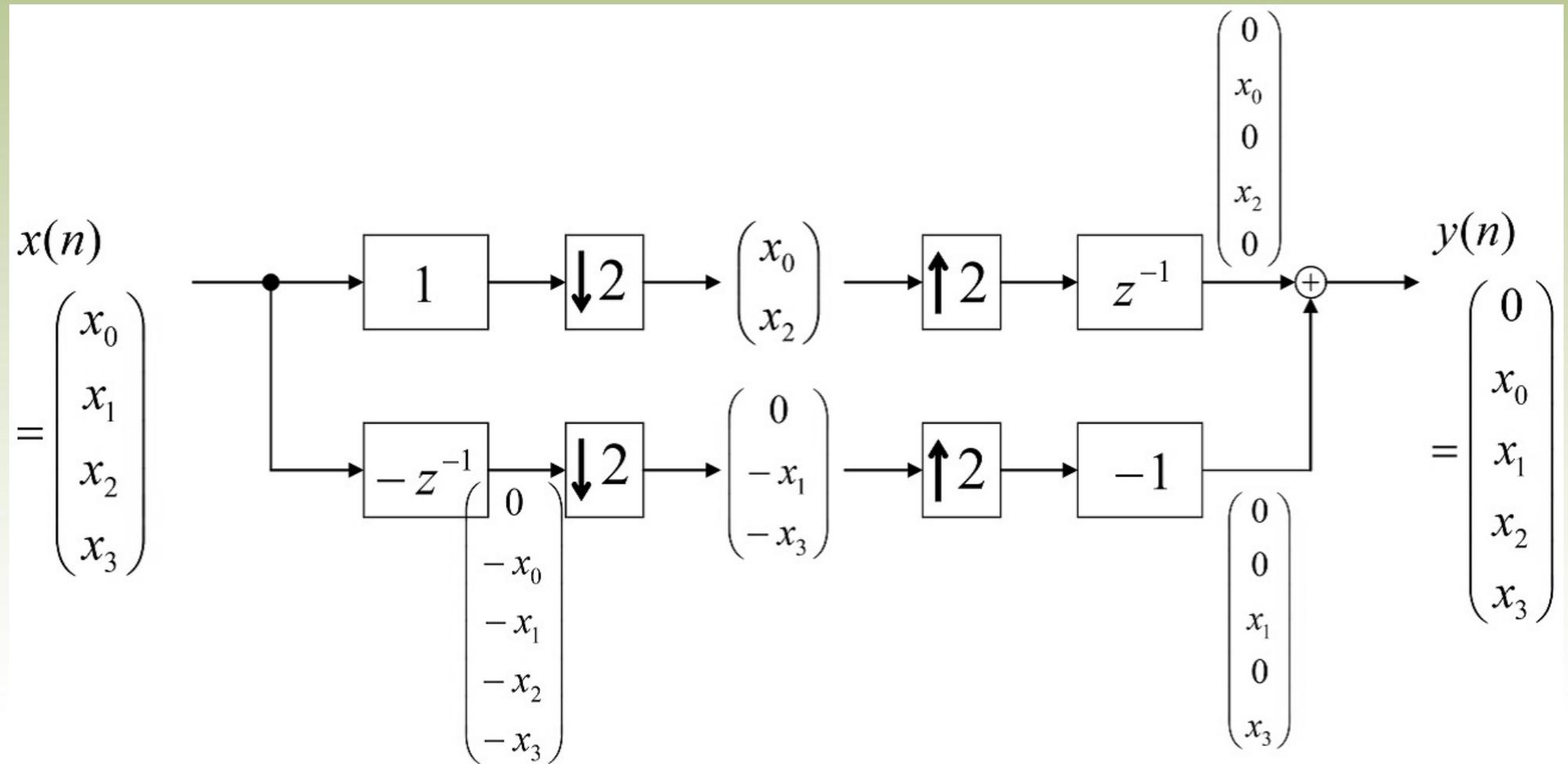
このようなフィルタをナイキストフィルタという. とくに $D=2, c=1$ の場合ハーフバンドフィルタといい, 次式を満たす.

$$H(z) + H(-z) = 2.$$

20 Lazy Filter Bank

フィルタらしい周波数選択性がないので、怠け者フィルタバンクという。左側を分析側（変換部）、右側を合成側（逆変換部）という。2チャンネルのフィルタバンクである。

下側チャンネルの分析側と合成側に-1倍の係数があるが、これは相殺するから除去してもよい。



21 PRFB (Perfect Reconstruction Filter Banks)

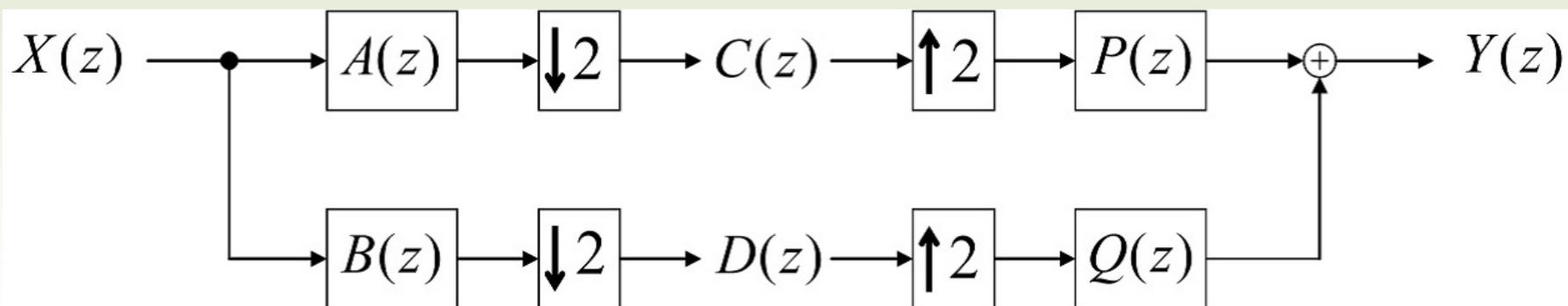
4つのFIRフィルタから成る下図のフィルタバンクについて， L を整数として， $y(n) \propto x(n-L)$ を満たすとき，完全再構成フィルタバンクという。

$$P(z) = B(ze^{j\frac{2\pi}{2}}) = B(-z),$$

$$Q(z) = -A(ze^{j\frac{2\pi}{2}}) = -A(-z)$$

とすると，PRFBとなる。

なお， $H(z) = A(z)P(z)$ と定めると $H(z)$ はハーフバンドフィルタである。



- C implies the coarse (粗い) component. ... Lowpass channel.
- D implies the detail (細かい) component. ... Highpass channel.
- $A(z)P(z)$ is referred to as a product filter (積フィルタ).

22 PRFB条件の証明

$$C(z) = \frac{1}{2} \left(A(z^{\frac{1}{2}})X(z^{\frac{1}{2}}) + A(-z^{\frac{1}{2}})X(-z^{\frac{1}{2}}) \right),$$

$$D(z) = \frac{1}{2} \left(B(z^{\frac{1}{2}})X(z^{\frac{1}{2}}) + B(-z^{\frac{1}{2}})X(-z^{\frac{1}{2}}) \right)$$

$$\therefore Y(z) = P(z)C(z^2) + Q(z)D(z^2)$$

$$= P(z) \frac{1}{2} [A(z)X(z) + A(-z)X(-z)] + Q(z) \frac{1}{2} [B(z)X(z) + B(-z)X(-z)]$$

$$= \frac{1}{2} [P(z)A(z) + Q(z)B(z)]X(z) + \frac{1}{2} [P(z)A(-z) + Q(z)B(-z)]X(-z)$$

第1項をひずみ成分といい，第2項をエイリアス成分という．

$Y(z) = z^{-L}X(z)$ となるためには次式が要請される．

$$P(z)A(z) + Q(z)B(z) = 2z^{-L},$$

$$P(z)A(-z) + Q(z)B(-z) = 0.$$

$$i.e., \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ A(-z) & B(-z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(z) \\ Q(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z^{-L} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

行列式を $m(z)$ とかくと,

$$\begin{aligned} m(z) &= A(z)B(-z) - A(-z)B(z) \\ &= -[A(-z)B(z) - A(z)B(-z)] = -m(-z). \end{aligned}$$

つまり, $m(z)$ は奇関数だと分かる. いま, 連立方程式を解くと,

$$\begin{pmatrix} P(z) \\ Q(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ A(-z) & B(-z) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2z^{-L} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{m(z)} \begin{pmatrix} B(-z) & -B(z) \\ -A(-z) & A(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2z^{-L} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

しかるに, A, B, P, Q のすべてが **FIR** フィルタであるためには, $m(z)$ は z の単項式でなければならない. また, $m(z)$ は奇関数だから, L は奇数でなければならない. したがって, $m(z) = 2z^{-L}$ とすれば

$$P(z) = B(-z),$$

$$Q(z) = -A(-z)$$

であることが必要である.

23 無ひずみ条件 (Distortion-Free Condition)

Aliase-free (AF) 条件は先の**PRFB 条件**の証明で述べた．ここでは出力波形が無ひずみで得られるための条件をより深く考察する．

AF 条件をつかえば，**DF 条件**は

$$P(z)A(z) + Q(z)B(z) = P(z)A(z) - A(-z)P(-z) = 2z^{-L}$$

とかける．つまり， $z^L P(z)A(z) - z^L A(-z)P(-z) = 2$ ．

いま

$$G(z) = z^L P(z)A(z)$$

と定義すると， L が奇数だから

$$G(z) + G(-z) = 2$$

が成立する．したがって， $G(z)$ はハーフバンドフィルタである．【証明終】
したがって， $A(z)$ ， $P(z)$ の両者はハーフバンドフィルタ $G(z)$ の因数分解によって形成される．

24 2チャンネルPRFBの設計法

1. ハーフバンドフィルタ $G(z)$ を作る。
例えばMatlabにはRemez' Exchange Algorithmが装備されているので、これを使って設計する。NOSIDE (Kikuchi, 1986)はもっと複雑なフィルタも設計できるが、Basicでコーディングされており、稼動環境がないかも。
2. $G(z) = z^L P(z)A(z)$ と因数分解し、 $A(z)$ と $P(z)$ を定める。
3. AF条件により、 $B(z)$ と $Q(z)$ を定める。
4. (回路構成が必要ならば、) ポリフェーズ表現を使ってリフティングステップに分解し、高効率な回路構造、ないし計算アルゴリズムを見出す。

(注) リフティングは後で学習する。なお、Liftingという用語は2とおりの意味で使われている。1つは高能率の計算法をさし、もうひとつは積フィルタの生成法をさす。

25 PRFBをリフティングで作る（別法）

- 【Start】PRFBを作るうえで， $A(z) = 1$ と $P(z) = z^{-1}$ は最も簡単で自明な積フィルタ因子である．ゆえに， $z^{-L} = z^{-1}$ ， $B(z) = -z^{-1}$ ， $Q(z) = -1$ ．
- 【Lifting】任意の偶数長対称多項式 $S(z)$ により，

$$A'(z) = A(z) + P(-z)S(z^2),$$

$$\text{または } P'(z) = P(z) + A(-z)S(z^2)$$

を定義すると，これが新たな $A(z)$ または $P(z)$ となる．

- **Example 1:** $S(z) = \frac{1}{16}(-1 + 9z^{-1} + 9z^{-2} - z^{-3})$ とする．これを $(-1 \ 9 \ 9 \ -1)/16$ と略記する．The Lazy FBでは $z^{-L} = z^{-1}$ なので，インパルス応答の中心を合わせるため，実際には $zS(z) = \frac{1}{16}(-z + 9 + 9z^{-1} - z^{-2})$ とする．

$$\begin{array}{l|l} A(-z)S(z^2) & (\ -1 \ 0 \ 9 \ 0 \ 9 \ 0 \ -1 \) \frac{1}{16} \\ P(z) & + \qquad \qquad \qquad 1 \\ \hline P'(z) & (\ -1 \ 0 \ 9 \ 16 \ 9 \ 0 \ -1 \) \frac{1}{16} \end{array}$$

その結果， $A(z) = 1$ ， $P(z) = \frac{1}{16}(-1 + 9z^{-2} + 16z^{-3} + 9z^{-4} - z^{-6})$ の1/7-tap PRFBを得る．

26 レギュラリティの変更

- **Regularity** とは $A(z)$ または $P(z)$ が有する $z = -1$ における零点の多重度である .
- **Wavelet** 波形の滑らかさ , 周波数領域における遮断特性の鋭さを表わす .
- $A(z)$ と $P(z)$ の間で因子 $\frac{1}{2} (1+z^{-1})$ を移動すると **Regularity** が変わる .
- たとえば新たな P, A を $P'(z) = \frac{2}{1+z^{-1}} P(z), A'(z) = \frac{1+z^{-1}}{2} A(z)$ と作る .
- **Example 2: 2/6-tap Filter bank**

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccc}
 & -1 & 1 & 8 & 8 & 1 & -1 \\
 \hline
 1 & 1 &) & -1 & 0 & 9 & 16 & 9 & 0 & -1 \\
 & & & -1 & -1 & & & & & \\
 \hline
 & & & 1 & 9 & & & & & \\
 & & & 1 & 1 & & & & & \\
 \hline
 & & & & 8 & 16 & & & & \\
 & & & & 8 & 8 & & & & \\
 \hline
 & & & & & 8 & 9 & & & \\
 & & & & & 8 & 8 & & & \\
 \hline
 & & & & & & 1 & 0 & & \\
 & & & & & & 1 & 1 & & \\
 \hline
 & & & & & & & -1 & -1 & \\
 & & & & & & & -1 & -1 & \\
 \hline
 & & & & & & & & & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 & & & 1 \\
 & & & \times &) & 1 & 1 \\
 & & & & & \hline
 & & & & & 1 & 1
 \end{array}$$

こうして

$$P'(z) = \frac{1}{8} (-1, 1, 8, 8, 1, -1),$$

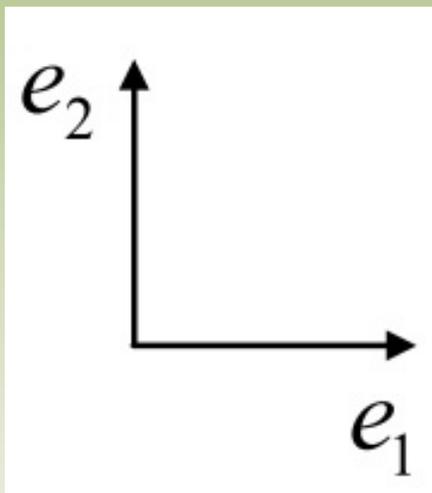
$$A'(z) = \frac{1}{2} (1, 1)$$

と 2/6-tap のフィルタバンクが得られる .

27 SSKF (Simple Short Kernel Filters)

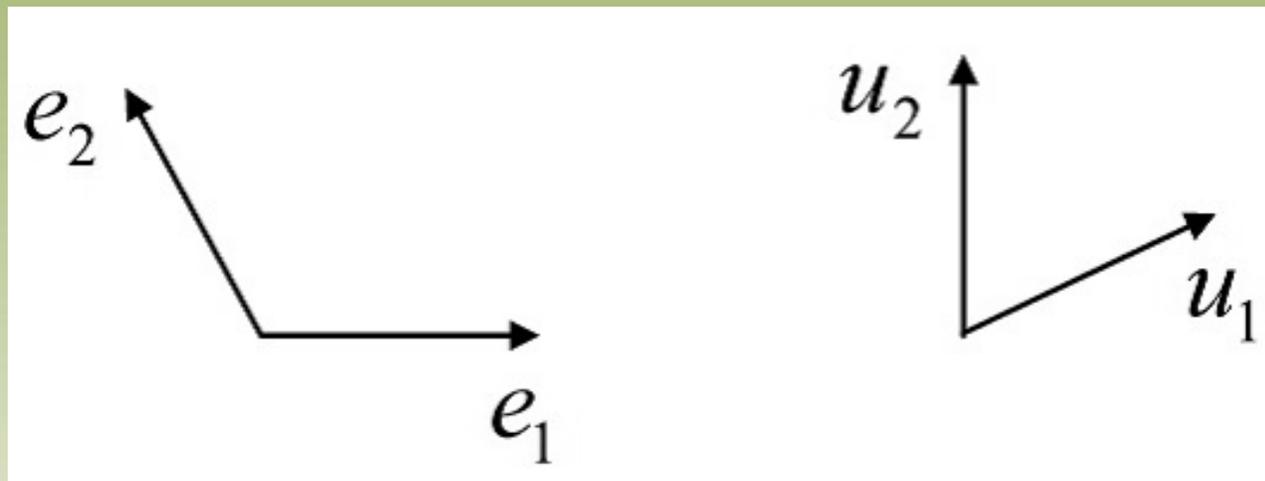
- 同様に繰り返すと, **3/5-tap**とか**4/4-tap**のフィルタバンクが得られる.
- 例題 1 と 2 の延長線上から次のような姉妹たちが得られる.
- **1/7-tap**: $A(z) = 1, P(z) = \frac{1}{16}(-1, 0, 9, 16, 9, 0, -1)$
- **2/6-tap**: $A(z) = \frac{1}{2}(1, 1), P(z) = \frac{1}{8}(-1, 1, 8, 8, 1, -1)$
- **3/5-tap**: $A(z) = \frac{1}{4}(1, 2, 1), P(z) = \frac{1}{4}(-1, 2, 6, 2, -1)$
- **4/4-tap**: $A(z) = \frac{1}{8}(1, 3, 3, 1), P(z) = \frac{1}{2}(-1, 3, 3, -1)$
- **5/3-tap**: $A(z) = \frac{1}{16}(1, 4, 6, 4, 1), P(z) = (-1, 4, -1)$
- 上記のうち, **3番目を3/5-tap SSKF**といい, 良好な特性を示す.
- 以上の姉妹たちはいずれも双直交システムである.
- ドブシズの**4-tap**直交ウェーブレットシステムは以上の姉妹の親戚であり, **1/7-tap FB**の別の因数分解から得られる. 具体的には,
$$P(z) = \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}z^{-1}\right)$$
と因数分解した場合に該当する. 既知の**SSKF**と世紀の新発見といわれるドブシズの直交ウェーブレットとの驚くべき接点なり.

28 Biorthogonal?



直交系では
基底ベクトルが互いに直交する。

$$\langle e_1, e_2 \rangle = 0$$



双直交系には2組の基底系がある。
各基底系では基底ベクトルは直交しない。
が、両基底系から基底ベクトルを1つずつ
取り出すと互いに直交する。

$$\langle e_1, u_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle e_2, u_1 \rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$$

29 Lifting Once Again for a 9/7-tap PRFB

$S(z) = \frac{1}{4}(1 + z^{-1})$ と選んで 1/7-tap PRFB の $A(z)$ にリフティングを適用すると, 9/7-tap PRFB が得られる. これはなかなか良好な特性であり, LBLC (Shinoda/Kikuchi, *IEEE ICIP 2006*, *IEICE Trans. 2008*) で使用.

$A'(z) = A(z) + P(-z)S(z^2)$ を適用して新たな $A(z)$ を作る.

$P(-z)$		1	0	-9	16	-9	0	1
$z^{-2}P(-z)$	+		1	0	-9	16	-9	0
$A(z) \times 16 \times 4$	+	1	0	-8	16	-18	16	-8
					64			
		1	0	-8	16	46	16	-8

その結果, 次のとおり 9/7-tap PRFB が得られる.

$$A'(z) = \frac{(1, 0, -8, 16, 46, 16, -8, 0, 1)}{64}$$

$$P'(z) = \frac{(-1, 0, 9, 16, 9, 0, -1)}{16}$$

30 参考文献とか受講学生の発見例とか

- H. Kiya, M. Yae, and M. Iwahashi, A linear-phase two-channel filter bank allowing perfect reconstruction, *Proc. IEEE ISCAS*, 951-954, 1992.
- H. Honma (Kiya) and M. Yae, ditto (同上), *Proc. 6th DSP Symp.*, 251-256, Atami, Japan, Nov. 1991.
- G. Strang and T. Nguyen, *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, MA, U.S.A., 1996.

$S(z) = \frac{(-1, 10, 10, -1)}{18}$ を使うと $P'(z) = \frac{(-1, 0, 10, 18, 10, 0, -1)}{18}$ となり ,

1/7-tap FB ができる . さらに $S(z) = \frac{(1, 1)}{4}$ を適用すると

$A'(z) = \frac{(1, 0, -9, 18, 52, 18, -9, 0, 1)}{72}$ となり , **9/7-tap FB** ができる .

$S(z) = \frac{(-1, 7, 7, -1)}{12}$ を使うと $P'(z) = \frac{(-1, 0, 7, 12, 7, 0, -1)}{12}$ となり ,

1/7-tap FB ができる . さらに $S(z) = \frac{(1, 1)}{4}$ を適用すると

$A'(z) = \frac{(1, 0, -6, 12, 34, 12, -6, 0, 1)}{48}$ となり , **9/7-tap FB** ができる .

31 完全再構成条件をポリフェーズ行列でかく

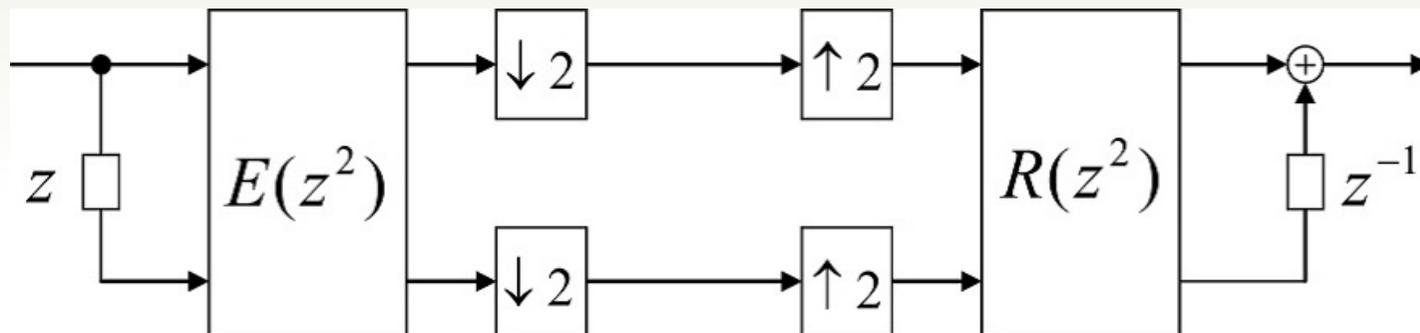
2チャンネルFIRフィルタバンクのポリフェーズ表現をかく。
合成側を順遅延ポリフェーズで書く。

$$\begin{pmatrix} P(z) \\ Q(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0(z^2) & P_1(z^2) \\ Q_0(z^2) & Q_1(z^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z^{-1} \end{pmatrix} = R(z^2) \begin{pmatrix} 1 \\ z^{-1} \end{pmatrix}, \text{ where } R(z) = \begin{pmatrix} P_0(z) & P_1(z) \\ Q_0(z) & Q_1(z) \end{pmatrix}$$

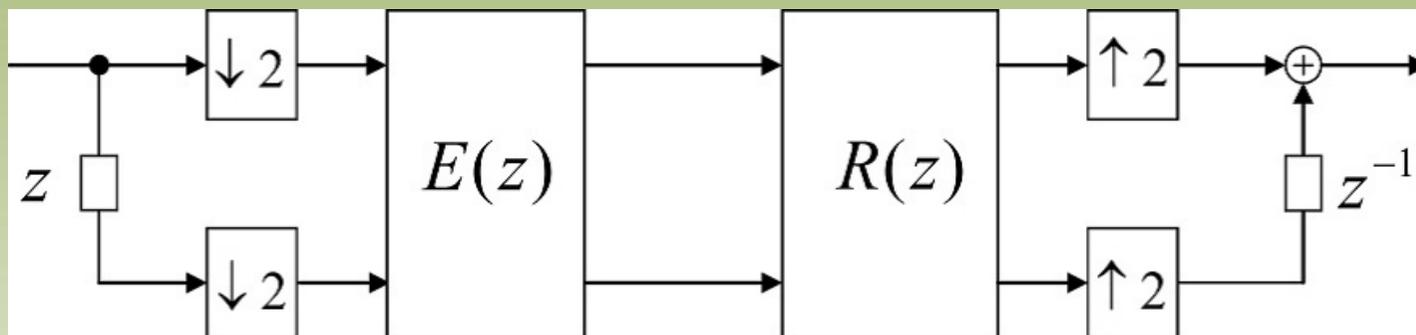
分析側はインパルス応答の終始を逆転し，逆遅延ポリフェーズで書く。

$$\begin{pmatrix} A(z) \\ B(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0(z^2) & A_1(z^2) \\ B_0(z^2) & B_1(z^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} = E(z^2) \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}, \text{ where } E(z) = \begin{pmatrix} A_0(z) & A_1(z) \\ B_0(z) & B_1(z) \end{pmatrix}$$

$E(z)$, $R(z)$ をポリフェーズ行列という。これより次のブロック図を得る。



アップ・ダウンサンプリングを外側に移動すると下図を得る。



したがって、 $y(n) = x(n)$ であるためには

$$E(z)R(z) = I$$

が必要だと分かる。

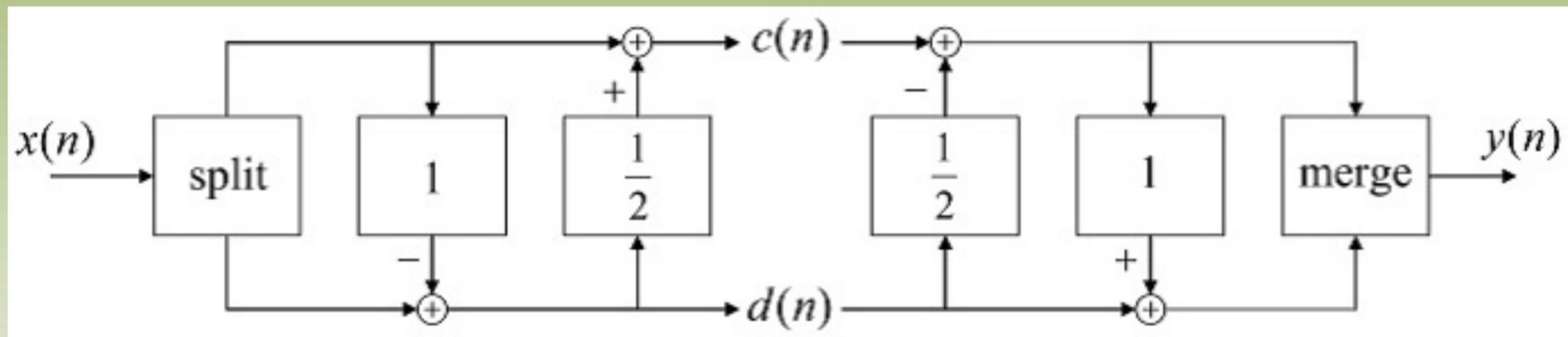
$y(n) = x(n-L)$ であることを完全再構成 (PR) だという場合は、

$$\text{PR} \leftrightarrow E(z)R(z) = z^{-L}I.$$

FIR フィルタバンクのときは次の条件でもよい。

$$\text{PR} \leftrightarrow \det E(z) = z^{-L}$$

32 Lifting as a Trick for Reversible Transforms and In-Place Computation



The above filter bank is a system for Haar wavelet transform. It is the only one that satisfies both the linear-phase and orthogonality.

リフティングのはしご段にどんな演算をしても可逆である理由は、代数的には次の恒等式から理解することができる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

33 ポリフェーズ行列を Lifting に分解する (5/3-SSKF)

FIR Lowpass フィルタ $A(z)$ が分析側フィルタとして与えられるとき，これに対する 2 チャンネル **PRBF** をリフティング形式に構成する．

FIR フィルタの伝達関数 $A(z)$ とインパルス応答 $\{a(0), a(1), a(2), \dots\}$ を同義のものとして略記するので，乞御容赦．

PRFB では， $B(z) = P(-z)$ ， $Q(z) = -A(-z)$ の関係があり， P から B が， A から Q がそれぞれ定まる．また， $A(z)P(z)$ がハーフバンドフィルタとなることから $A(z)P(z)$ の因数分解から A と P を定めることができる．

ゆえに $A(z)$ だけが与えられれば十分で，他を参照する必要はない．だが，ここではポリフェーズ行列の要素を形式的に埋めておくために $B(z)$ も記入しておく．ローパスフィルタ $A(z) = \frac{1}{8}\{-1, 2, 6, 2, -1\}$ を取り上げる．

定数倍の $\frac{1}{8}$ を無視して，分析側をポリフェーズ行列でかくと，

$$\begin{pmatrix} C(z) \\ D(z) \end{pmatrix} = E(z) \begin{pmatrix} X_0(z) \\ X_1(z) \end{pmatrix},$$

ただし ,
$$E(z) = \begin{pmatrix} A_0(z) & A_1(z) \\ B_0(z) & B_1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{-1, 6, -1\} & \{2, 2\} \\ B_0(z) & B_1(z) \end{pmatrix}.$$

はじめに $A_0(z) = \{-1, 6, -1\}$ と $A_1(z) = \{2, 2\}$ に対して **Euclid** の互除法を適用して行列 $E(z)$ を因数分解する .

互除法の表記慣習に従い , $E(z)$ の第 1 行を列ベクトル形式に

$$\begin{pmatrix} A_0(z) \\ A_1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{-1, 6, -1\} \\ \{2, 2\} \end{pmatrix} \text{ と書いて互除法を適用する . つまり ,}$$

$$A_0(z) = A_1(z)q_1(z) + r_1(z)$$

をみたく $q_1(z)$ と $r_1(z)$ を求める . $q_1(z)$ は $A_0(z)$ を除数 (**divisor**) $A_1(z)$ で除した商 (**quotient**) であり , $r_1(z)$ は剰余 (**remainder**) である .

一般に互除法の計算は一意的でない . この例ではつぎのように 2 とおりの除算が可能である . このうち , 商多項式も直線位相になるものを採用する .

今度は除数を被除数に，商を除数に替えて除算する．

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{2} \quad \frac{7}{2} \\ \hline 2 \ 2 \) \ -1 \ 6 \ -1 \\ \quad \underline{-1 \ -1} \\ \qquad \quad 7 \ -1 \\ \qquad \quad \underline{7 \ 7} \\ \qquad \qquad \qquad -8 \end{array}$$

商が直線位相でないので棄却．

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \\ \hline 2 \ 2 \) \ -1 \ 6 \ -1 \\ \quad \underline{-1 \ -1} \\ \qquad \quad 7 \ -1 \\ \qquad \quad \underline{-1 \ -1} \\ \qquad \qquad \qquad 8 \end{array}$$

これを採用する．

$$\begin{array}{r} \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \\ \hline 8 \) \ 2 \ 2 \\ \quad \underline{2} \\ \qquad \quad 2 \\ \qquad \quad \underline{2} \\ \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$$

剰余が0になって割り切れた．

互除法が終結したので，結果を行列で書く．

$$\begin{array}{l} A_0 \\ A_1 \end{array} \begin{pmatrix} \{-1, 6, -1\} \\ \{2, 2\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1+6z^{-1}-z^{-2}}{8} \\ \frac{2+2z^{-1}}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1+z^{-1}}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2+2z^{-1}}{8} \\ \frac{8z^{-1}}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1+z^{-1}}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+z^{-1}}{4} & 1 \\ z^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

始めに $A(z)$ の列ベクトルを作った操作を逆にたどり， $B(z)$ のポリフェーズ成分を書き足してポリフェーズ行列の形式を回復し，しかる後，行列の転置を行なって信号の伝播を表わすポリフェーズ行列を得る．

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A_0(z) & A_1(z) \\ B_0(z) & B_1(z) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{-1+6z^{-1}-z^{-2}}{8} & B_0(z) \\ \frac{2+2z^{-1}}{8} & B_1(z) \end{pmatrix}^T \\
&= \left[\begin{pmatrix} -\frac{1+z^{-1}}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+z^{-1}}{4} & 1 \\ z^{-1} & 0 \end{pmatrix} \right]^T \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1+z^{-1}}{4} & z^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1+z^{-1}}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \text{対角項を } z^{-n} \text{ にしたい}
\end{aligned}$$

単位行列

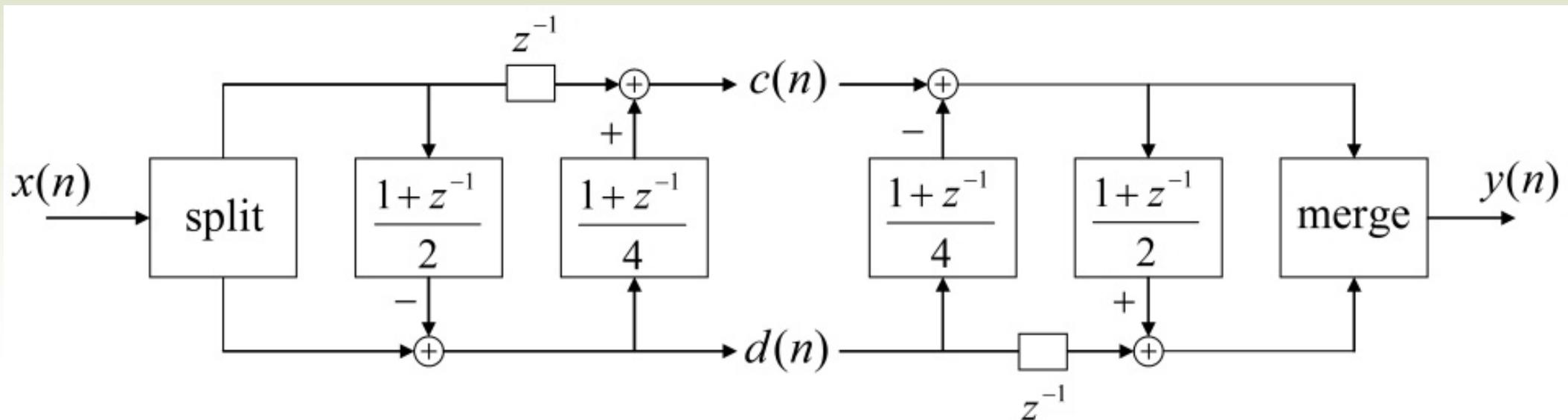
$$= \begin{pmatrix} \frac{1+z^{-1}}{4} & z^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -\frac{1+z^{-1}}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

左の列置換 右の行置換

$$= \begin{pmatrix} z^{-1} & \frac{1+z^{-1}}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1+z^{-1}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Reversible 5/3-tap FB via a factorization of the polyphase matrix

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} A_0(z) & A_1(z) \\ B_0(z) & B_1(z) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{-1+6z^{-1}-z^{-2}}{8} & B_0 \\ \frac{2+2z^{-1}}{8} & B_1 \end{pmatrix}^T = \left[\begin{pmatrix} -\frac{1+z^{-1}}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+z^{-1}}{4} & 1 \\ z^{-1} & 0 \end{pmatrix} \right]^T \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1+z^{-1}}{4} & z^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1+z^{-1}}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+z^{-1}}{4} & z^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1+z^{-1}}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} z^{-1} & \frac{1+z^{-1}}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1+z^{-1}}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+z^{-1}}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1+z^{-1}}{2} & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



34 Reversible 9/7-tap Filter Bank

$$A(z) = \frac{1 + 0z^{-1} - 8z^{-2} + 16z^{-3} + 46z^{-4} + 16z^{-5} - 8z^{-6} + 0z^{-7} + z^{-8}}{64},$$

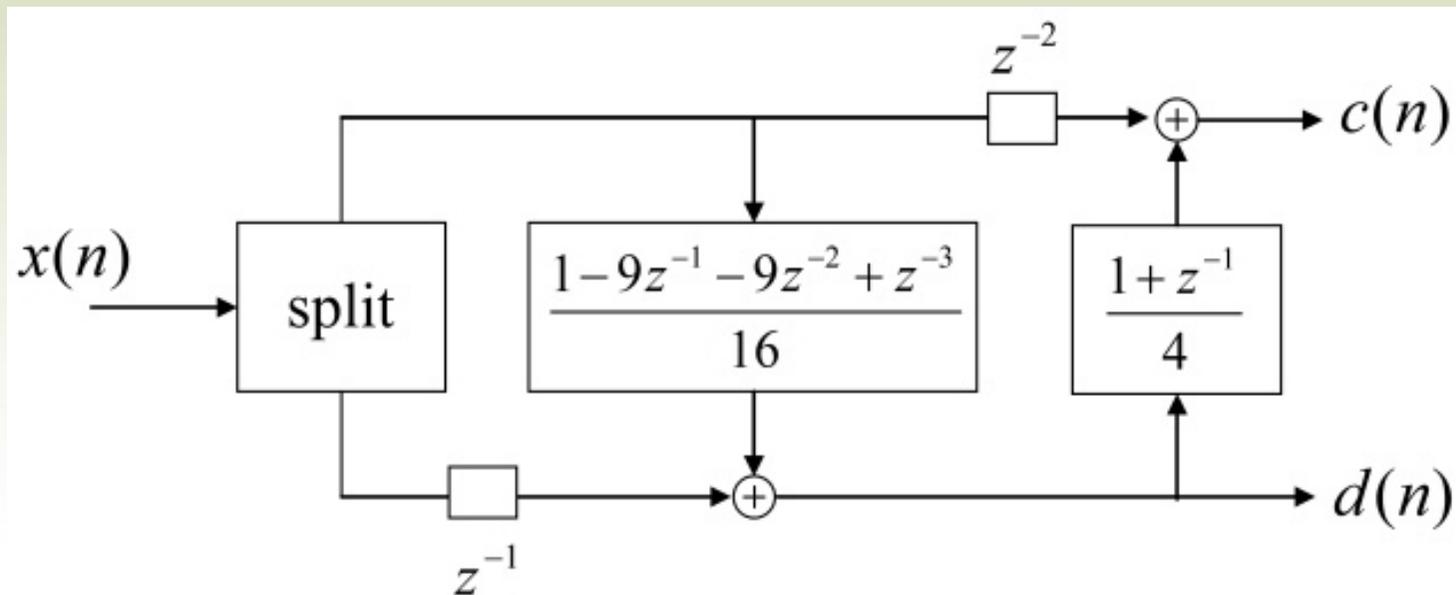
$$P(z) = \frac{-1 + 9z^{-2} + 16z^{-3} + 9z^{-4} - z^{-6}}{16}.$$

$A(z) = A_0(z^2) + z^{-1}A_1(z^2)$ とポリフェーズで表わし, ユークリッドの互除法で分解する.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_0(z) \\ A_1(z) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1-8z^{-1}+46z^{-2}-8z^{-3}+z^{-4}}{64} \\ z^{-1} \frac{16+16z^{-1}}{64} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1-9z^{-1}-9z^{-2}+z^{-3}}{16} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{16+16z^{-1}}{64} \\ \frac{64z^{-2}}{64} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1-9z^{-1}-9z^{-2}+z^{-3}}{16} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+z^{-1}}{4} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix}^T &= \begin{pmatrix} \frac{1+z^{-1}}{4} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1-9z^{-1}-9z^{-2}+z^{-3}}{16} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1+z^{-1}}{4} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} J J \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-2} \end{pmatrix} J J \begin{pmatrix} \frac{1-9z^{-1}-9z^{-2}+z^{-3}}{16} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+z^{-1}}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-9z^{-1}-9z^{-2}+z^{-3}}{16} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ただし， J は置換行列で， $JJ = I$.

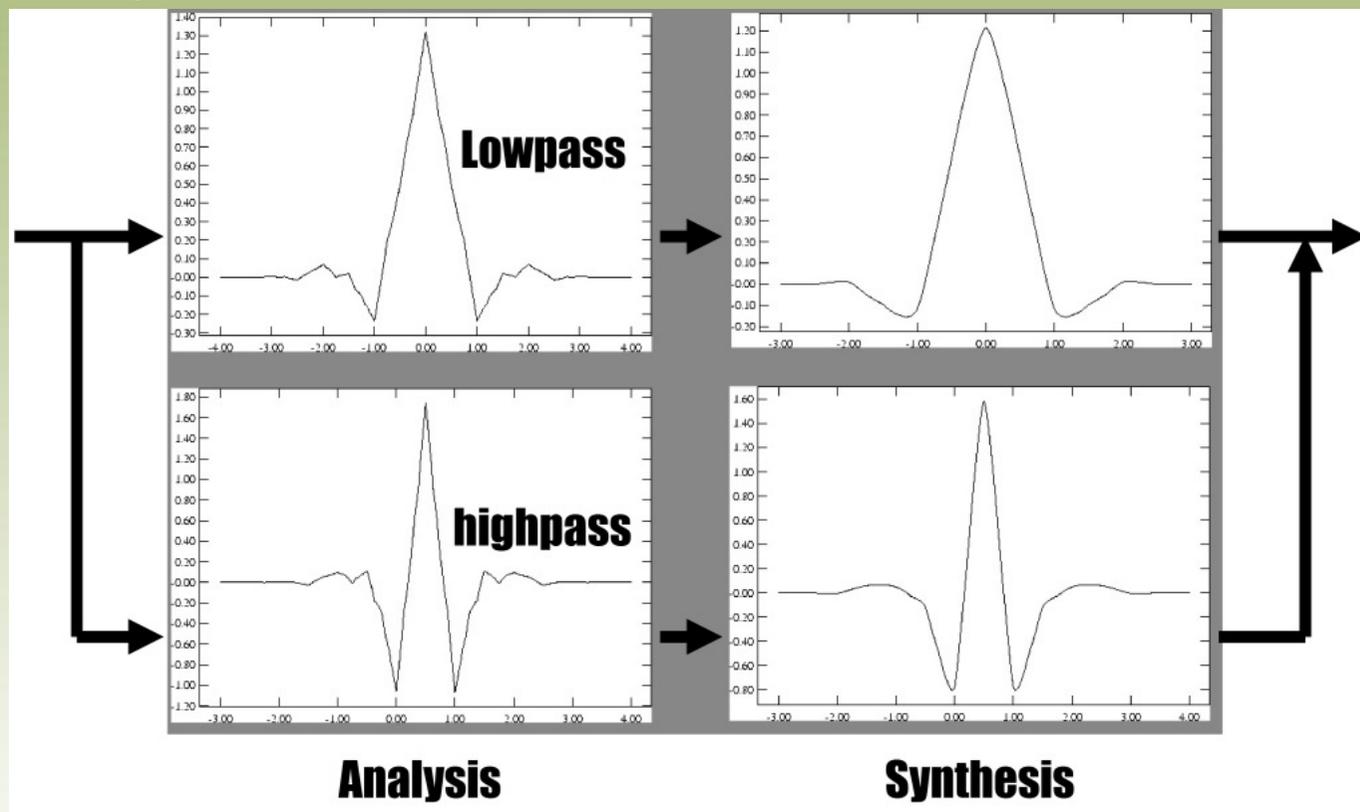


35 Reversible Wavelet Transforms

- Reversible? 整数値の信号が整数演算で完全に再構成される .
- Remember to compute signals in-place. (正にその場所で)
- (準備) 1/1-Trx : $c(t) \leftarrow x(2t), d(t) \leftarrow x(2t+1)$.
- 1/2-Trx: $d(t) \leftarrow d(t) - c(t)$.
- 1/3-Trx: $d(t) \leftarrow d(t) - \lfloor \frac{c(t)+c(t+1)}{2} \rfloor$.
- 2/2-Trx: $d(t) \leftarrow d(t) - c(t), c(t) \leftarrow c(t) + \lfloor \frac{d(t)}{2} \rfloor$.
- 2/6-Trx:
 $d(t) \leftarrow d(t) - c(t), c(t) \leftarrow c(t) + \lfloor \frac{d(t)}{2} \rfloor,$
 $d(t) \leftarrow d(t+1) - \lfloor \frac{c(t) - c(t+2)}{4} \rfloor$.
- 9/7-Trx: $d(t) \leftarrow d(t+1) + \lfloor \frac{c(t) - 9c(t+1) - 9c(t+2) + c(t+3)}{16} \rfloor,$
 $c(t) \leftarrow c(t+2) - \lfloor \frac{d(t) + d(t+1)}{4} \rfloor$.
- 原島博監修, 知識ベース・ハンドブック, 電子情報通信学会, 2010.
1群9編6章5節.

36 実数型9/7双直交ウェーブレットもある

これは実数体（実数軸）上で定義される実数値の離散双直交ウェーブレットです。

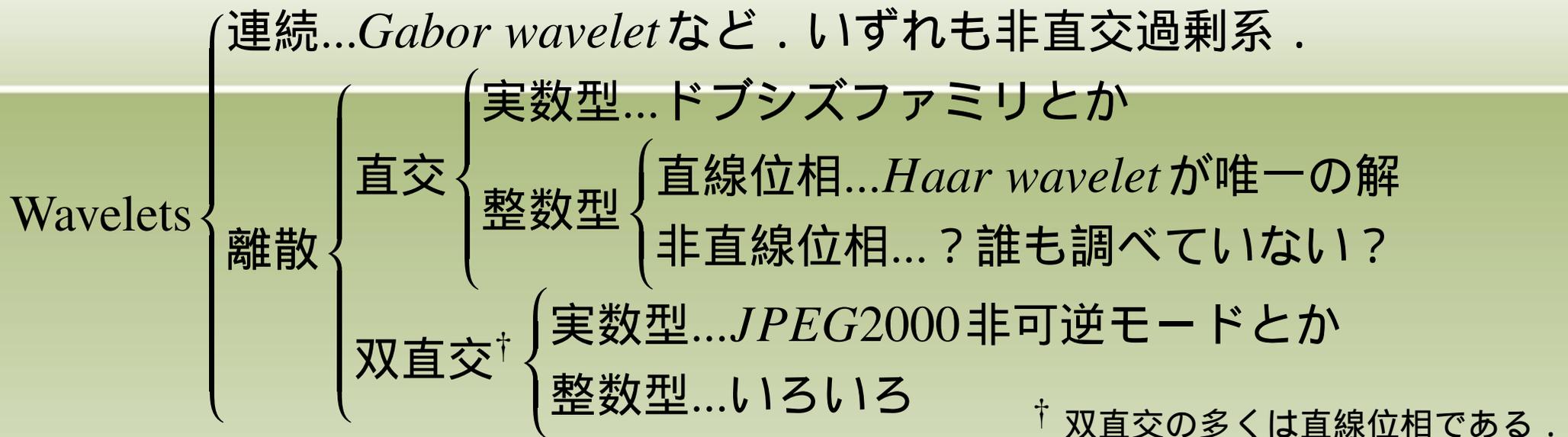


$$A(z) = (\dots, 0.852699, 0.377402, -0.110624, -0.023849, 0.037828)$$

$$P(z) = (\dots, 0.788486, 0.418092, -0.040689, -0.064539)$$

離散ウェーブレットは図のように連続的な波形を有するが、連続ウェーブレットの近似ではない。

離散ウェーブレットと連続ウェーブレット、両者は全く別ものです。



離散ウェーブレットの連続インパルス応答波形(前頁の図)の生成法

$$\begin{pmatrix} c(n) \\ d(n) \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \delta(n) \\ 0 \end{pmatrix};$$

$i \leftarrow 0;$

for ($i \geq 0; i \leftarrow i + 1$) {

$$c(n) \leftarrow \mathcal{W}^{-1} \begin{pmatrix} c(n) \\ d(n) \end{pmatrix};$$

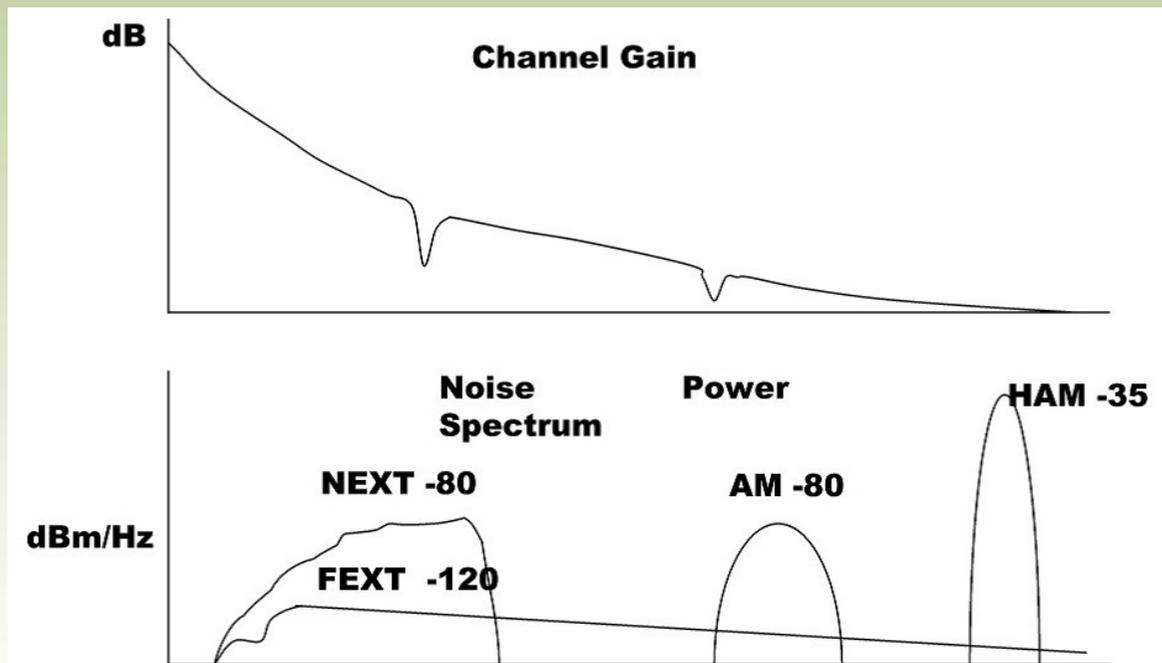
}...理論上は無限回 . コンピュータでは有限回で止める .

...これにより実数軸上で至るところ微分不可能な連続波形が得られる .
 こういう命題が理由で , 当初はウェーブレットは難解とされた .

37 The DSL technology turns copper into gold

ツイストペア銅線の周波数特性は周波数が高くなると利得が減衰する。
1.1MHz辺りでは伝送利得が1/10程度に低下。

雑音はnear-end cross talk, far-end cross talk, AM radio, HAM (amateur radio) など。

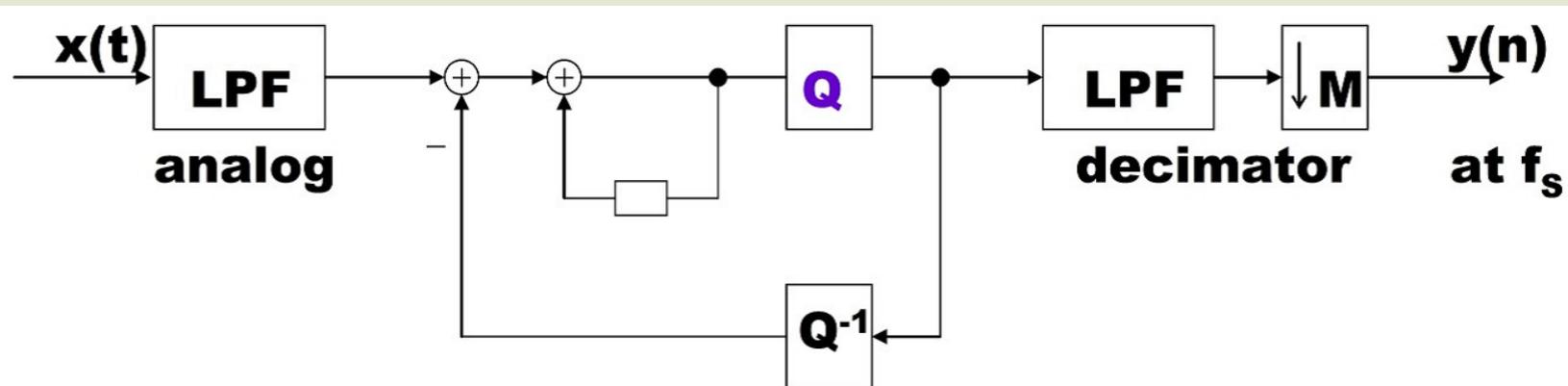


DSL (Digital Subscribers Line, デジタル加入者線)ではフィルタバンクによって1.1MHzの帯域を256等分(日本),あるいは2.2MHzの帯域を512等分(米国)する。もちろん距離によって減衰する。

38 Over-sampled One-bit A-to-D Converter

Oversampled Sigma-Delta A/D and D/A Converters, H. Inose and Y. Yasuda, "A unity bit coding method by negative feedback," *Proc. IEEE*, pp. 1524-1533, Nov. 1963.

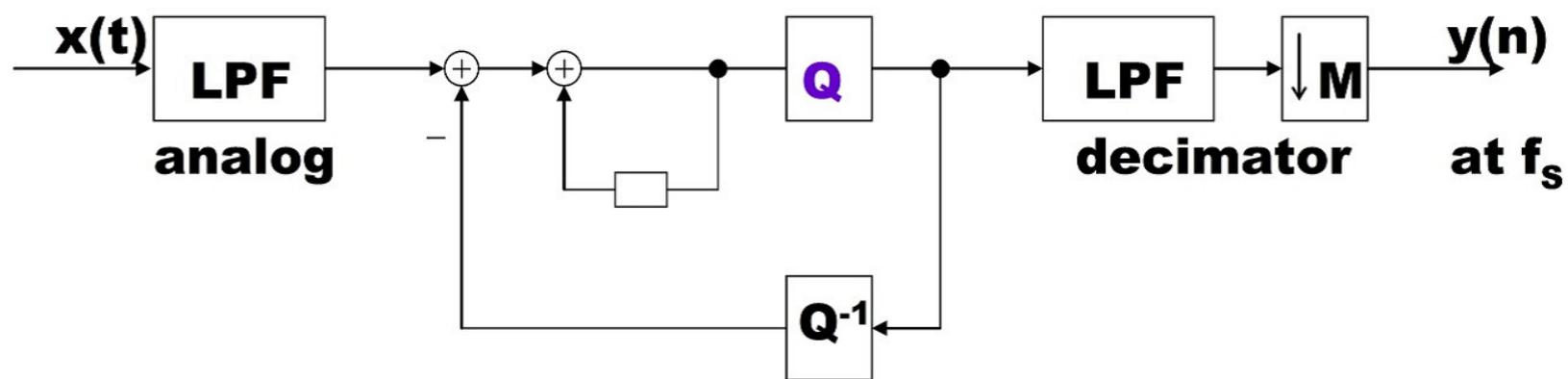
オーバーサンプリングと変調により，高精度で高速なA/D, D/A変換．
A/D変換ではアナログ信号 $x(t)$ を帯域制限してから，アナログ変調器に供給する．入力信号とアナログ参照信号の差を積分し(sigma of delta, sum of difference)，量子化器 Q でデジタル信号に変換する．
通常，量子化器はただの比較器であり，入力が正なら1，負なら0の1ビットのデジタル信号を出力する．



analog $\Sigma \Delta$ modulator at the rate of Mf_s

また、この量子化器は最終的なデジタル信号の標本速度よりもはるかに高速に動作させる。 $M = 30 \sim 1024$ とか。

逆量子化器 Q^{-1} は1ビットのデジタル信号をアナログ信号に変換するD/A変換器である。アナログ積分器は通常SCF (switched capacitor filter) で構成され、信号振幅は連続量であるが離散時間動作をする。量子化器の出力は低域通過デジタルフィルタに供給され、必要ならこのフィルタに累積(積分)機能をもたせてシングルビットからマルチビットのデジタル信号に変え、最後に間引いて所望の標本速度に変換する。



analog $\Sigma\Delta$ modulator at the rate of Mf_s

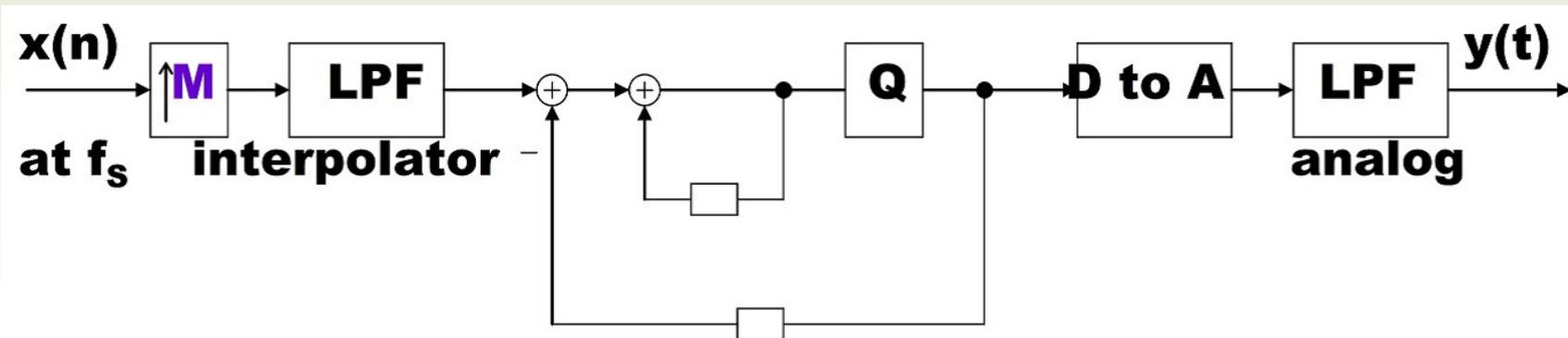
39 Over-sampled D/A Conversion

逆に，D/A変換器では標本化速度 f_s の入力信号 $x(n)$ の標本化速度を M 倍補間で高速なデジタル信号に変換する．

これがデジタル $\Sigma\Delta$ 変調器に入力され，デジタル参照信号との差を累積（積分）して，量子化器で正負を判定する．

判定出力は1ビットであり，これをシングルビットD/A変換器でアナログ信号に変換する．

最後にローパスフィルタで信号を平滑化し，帯域制限されたアナログ信号を得る．



digital $\Sigma\Delta$ modulator at the rate of Mf_s

40 量子化雑音のスペクトル整形

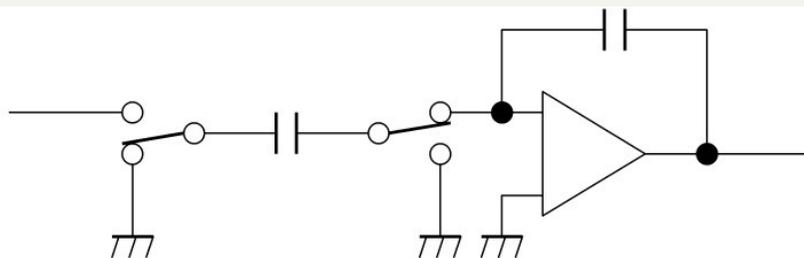
アナログ 変調でもデジタル 変調でも，積分機能を担当する回路はループフィルタ (loop filter) として理解すればさまざまな一般化が可能だ．実際，このループフィルタが量子化雑音のスペクトル整形をつかさどり，分解能などシステム全体の性能を支配する．

積分器の伝達関数はアナログ連続時間回路では $1/s$ ，アナログ離散時間回

路 (SCF) とデジタル回路では $\frac{1}{1-z^{-1}}$ や $\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$ などであり，1 次の

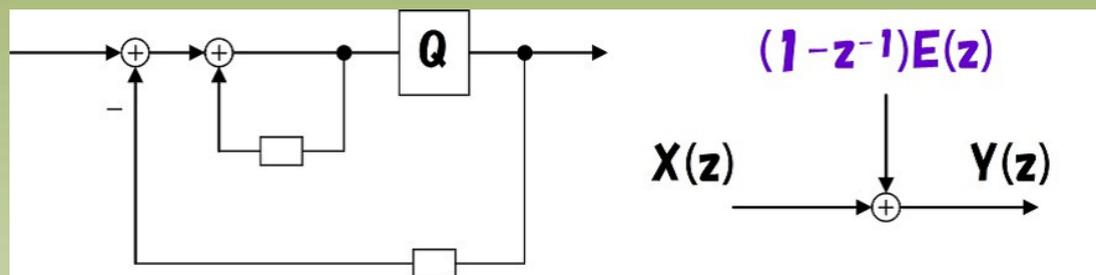
ループフィルタとなっている．これを高次の伝達関数に置き換えることにより多数の A/D, D/A 変換器が商用化されている．

なお，delta が sigma されるので delta-sigma ともいわれる．

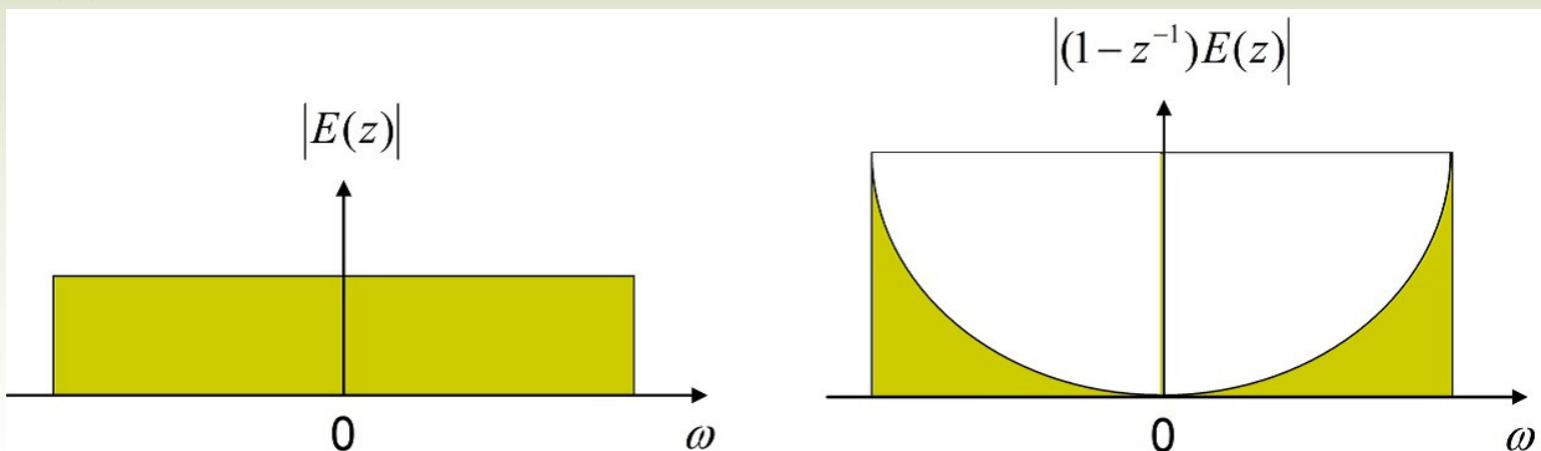


1st-order switched capacitor integrator, $1/(1-z^{-1})$

41 マルチループ 変調による高次ノイズ整形

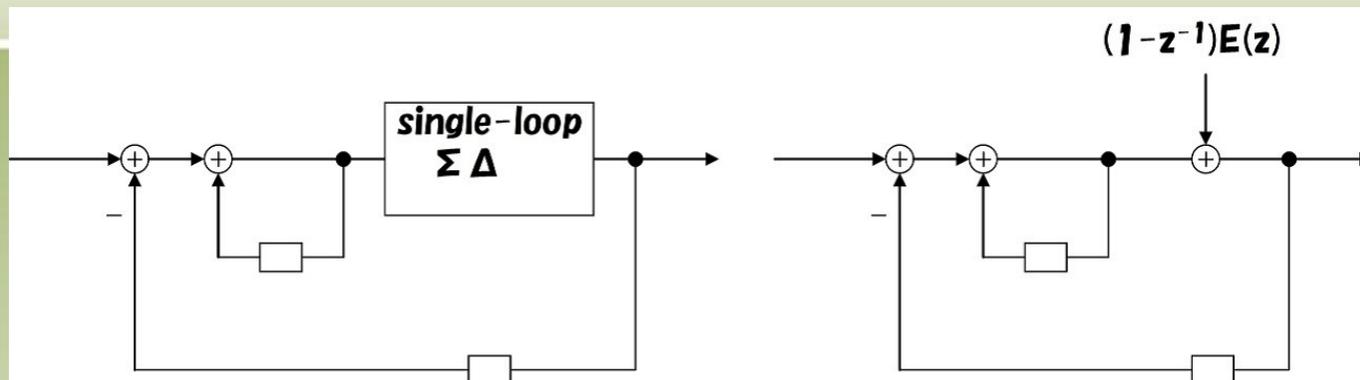


左図のシングルループ 変調器の入出力と量子化雑音の関係は $Y(z) = X(z) + (1 - z^{-1})E(z)$ とかけるので、右図のノイズシェイピングモデルと等価である。つまり、シングルループ 変調器自体を雑音 $(1 - z^{-1})E(z)$ を有する加法性雑音源と見ることができる。



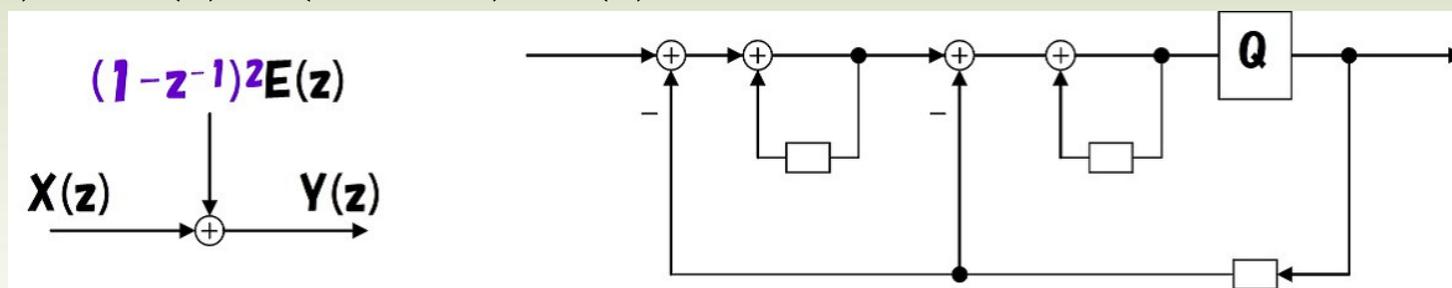
一様量子化雑音の周波数スペクトルは一定で広帯域だ。が、これの低周波部分を高周波帯域に掃きだして低速信号の占有帯域から雑音を追い出す。

したがって左下の回路は右下のモデルと等価である。



結局，ダブルループ 変調器が得られる。

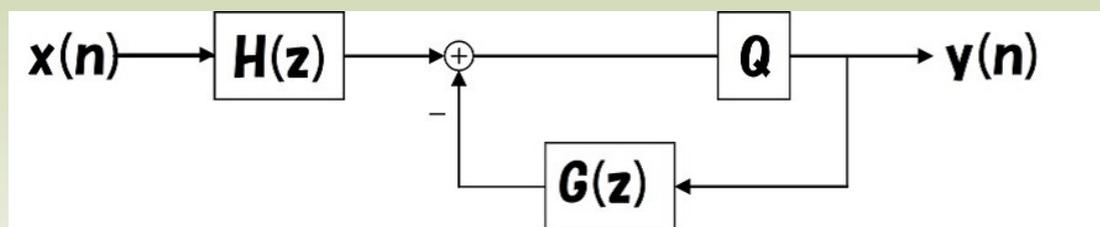
出力は $Y(z) = X(z) + (1 - z^{-1})^2 E(z)$ とかける。



42 雑音整形符号化の一般論 (T. Nguyen 1993)

一般に雑音整形符号化器は，フィルタ $H(z)$ に予測符号化器をつないだ下図のようなシステムと見ることができる．

(問い) 量子化特性が加法性白色雑音モデルで表わされると仮定して，出力 $Y(z)$ を $X(z)$ と $E(z)$ で書き表しなさい．また，ノイズシェイピング特性を $S(z)$ として $Y(z) = X(z) + E(z)S(z)$ なる形式に書けるためにはどのような条件が必要か．



(答え) $Y(z) = X(z) \frac{H(z)}{1+G(z)} + \frac{E(z)}{1+G(z)}$ ．したがって $H(z) = 1 + G(z)$ の条件があれば， $Y(z) = X(z) + \frac{E(z)}{H(z)}$ となり， $S(z) = 1/H(z)$ と与えられる．いま，フィルタを $H(z) = \left(\frac{1}{1-z^{-1}} \right)^n$ と n 次積分器にすれば $Y(z) = X(z) + E(z)(1-z^{-1})^n$ となり， n 次ノイズシェイピング特性が得られる．