回路学

菊池久和

新潟大学

http://telecom0.eng.niigata-u.ac.jp/

回路学では、簡単な事実 (知識) を たくさん組み合わせる

回路学は音楽に似ている、と思います

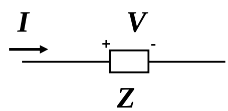
- アドミタンスはインピーダンスの逆数
- キルヒホッフ、オーム則
- 電圧源の内部インピーダンスは0
- 電流源の内部インピーダンスは∞
- 重ね合わせ
- テブナンの等価電源
- ミルマンの定理
- 周波数が、ある基準 (=1) にくらべて高いか、低いか

文字使用の約束事

- 電圧は V または E、電流は I または J
- インピーダンスは Z、アドミタンスは Y
- 抵抗は R、コンダクタンスは G
- キャパシタンスは C、インダクタンスは L、など
- 電気回路理論では
  - 振幅やフェーザ表示、演算子表示には大文字をつかう
  - 時間の関数として明記するときには、$v(t)$、$i(t)$　のように小文字を使用することが多い
  - 角周波数ωや s の関数として明記するときには、$Z(\omega)$ や $V(s)$ のように大文字をつかうことが多い。($s=j\omega$)
- そのほか、電子回路学では
  - 直流動作量 (定数) を V のように大文字で書く
  - 交流動作量 (時間の関数) を $v(t)$ のように小文字で書く
  - 周波数領域の動作量を $V(s)$ のように大文字で書く

Ohmの法則

- インピーダンス $\boldsymbol{Z}$ の2端子素子に電流 $\boldsymbol{I}$ が流れて発生する電圧降下 $\boldsymbol{V}$ は $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{ZI}$ である。

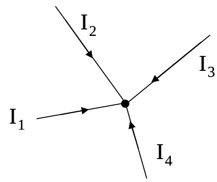


  - 約束1　電圧降下の向きは、電流の流れこむ端子をプラスと定義する。
  - 約束2　アドミタンス $\boldsymbol{Y}$ はインピーダンス $\boldsymbol{Z}$ の逆数である。

$$Y = \frac{1}{Z} \qquad G = \frac{1}{R}$$

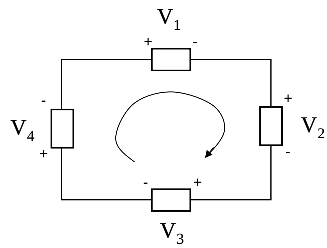
Kirchhoffの法則

- KCL：任意の節点に流れこむ電流の和はゼロである



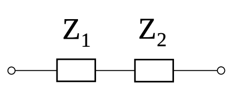
$$\sum_n I_n = 0$$

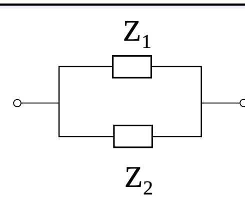
- KVL：任意の閉路を一巡する枝電圧の和はゼロである



$$\sum_n V_n = 0$$

直列接続と並列接続





- インピーダンスでかくと

$$Z = Z_1 + Z_2$$

- アドミタンスでかくと

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2}$$

- アドミタンスでかくと

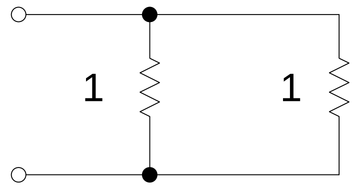
$$Y = Y_1 + Y_2$$

- インピーダンスでかくと

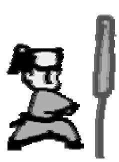
$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

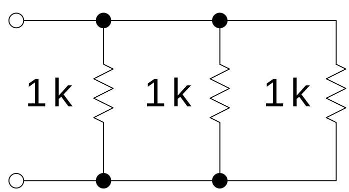
Quiz: Time Shock!
合成インピーダンスの値を答えなさい

$$\frac{1}{2}\Omega$$



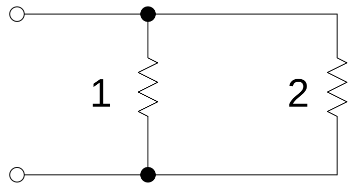
インピーダンスの値を答えなさい





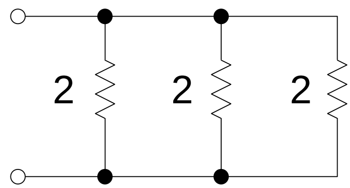
$$\frac{1}{3}\mathrm{k}\Omega$$

インピーダンスの値を答えなさい

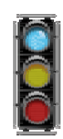


これと
同じだ

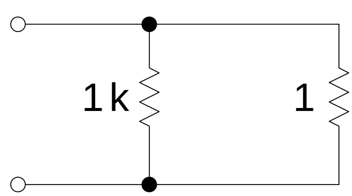
$$\frac{2}{3}\Omega$$



インピーダンスの概略値を答えなさい

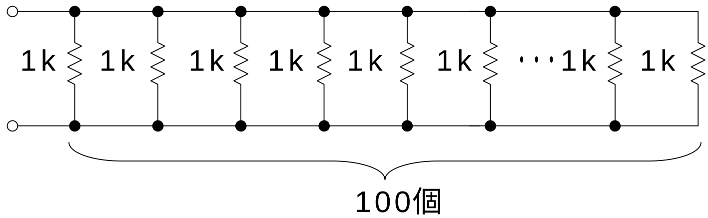


1Ω

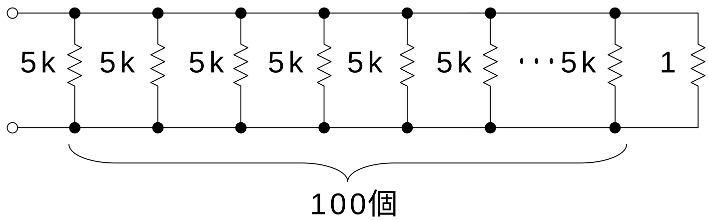


インピーダンスの概略値を答えなさい

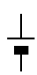
$\dfrac{1\,\mathrm{k}\Omega}{100}$



1Ω



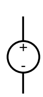
電圧源と電流源の回路図シンボル



直流電圧源

電流源

(交流) 電圧源

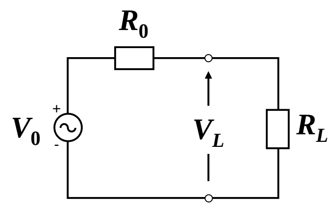


電圧源

理想電圧源の内部インピーダンスはゼロである。
理想電流源の内部インピーダンスは無限大である。

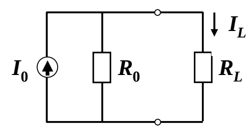
- 証明 (電圧源)
- 理想電圧源の内部インピーダンスを R_0 とかくとき、

$$V_L = \frac{R_L}{R_0 + R_L} V_0 = \frac{1}{\frac{R_0}{R_L} + 1} V_0$$

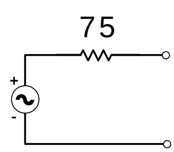


- R_L の大小にかかわらず、$V_L = V_0$ (一定) であるためには、$R_0 = 0$ でなければならない。(証明おわり)

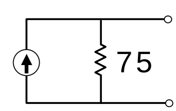
■電流源についても同様



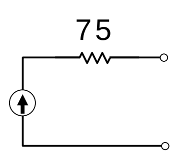
インピーダンスの値を答えなさい



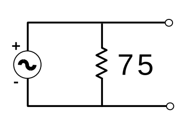
75



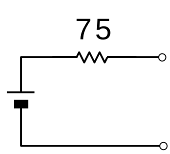
75



∞



0



75

インピーダンス整合によって、負荷に最大電力を供給する

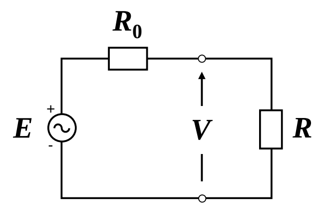
- 内部抵抗 R_0、開放電圧 E の電源に負荷抵抗 R を接続する
- 負荷で消費される電力 P は

$$P(R) = \frac{R}{(R+R_0)^2}E^2$$

- P は非負で、$P(0) = P(\infty) = 0$ である
- また、分子も分母も単調増加関数であり、

$$\frac{dP}{dR} = \frac{-R+R_0}{(R+R_0)^3}E^2$$

- である

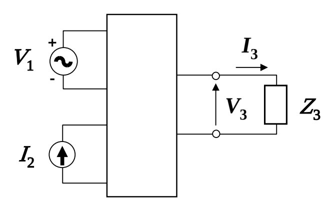


- ゆえに、$R = R_0$で P は最大値
  - これを整合という
- このとき、負荷抵抗における消費電力は

$$P_{\max} = \frac{E^2}{4R_0}$$

重ね合わせ

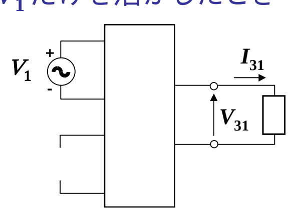
- 任意の回路について、たとえば
- 独立電源が $\boldsymbol{V_1}$ と $\boldsymbol{I_2}$ だけであるとする。
- $\boldsymbol{Z_3}$を流れる電流や電圧降下は？



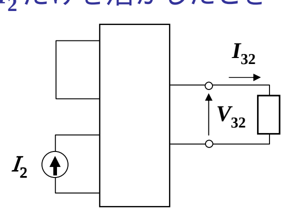
$$I_3 = I_{31} + I_{32}$$

$$V_3 = V_{31} + V_{32}$$

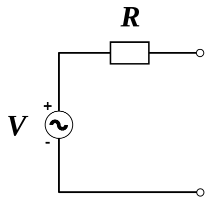
$\boldsymbol{V_1}$ だけを活かしたとき

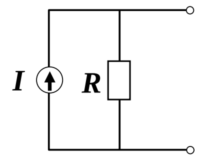


$\boldsymbol{I_2}$ だけを活かしたとき



Theveninの等価電源



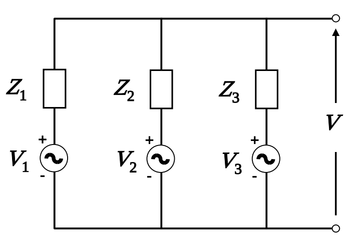


- 内部インピーダンスは ***R***
- 開放電圧は ***V***
- 短絡電流は ***V/R***

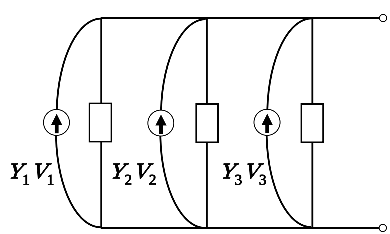
- 内部インピーダンスは ***R***
- 開放電圧は ***RI***
- 短絡電流は ***I***

開放電圧が等しい（***V*** = ***RI***）、あるいは
短絡電流が等しい（***I*** = ***V/R***）ならば、
２つの回路は等価である

Millmanの定理



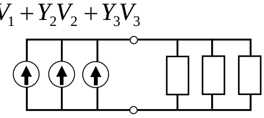
証明　テブナンにより



$$V = \frac{Y_1V_1 + Y_2V_2 + Y_3V_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

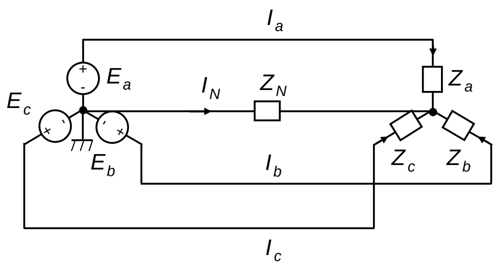
$$= \frac{\text{電源電流の総和}}{\text{アドミタンスの総和}}$$

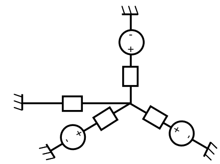
$Y_1V_1 + Y_2V_2 + Y_3V_3$



$$\frac{1}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

非対称3相交流回路。中性点の電位は





ミルマンの定理により

$$V_N = \frac{Y_a E_a + Y_b E_b + Y_c E_c}{Y_a + Y_b + Y_c + Y_N}$$

$$\text{電位} = \frac{\text{電源電流の和}}{\text{アドミタンスの和}}$$

正弦波のフェイザー表示

- 交流回路の動作を、正弦波に対する応答として記述する
- 正弦波は周期関数です
  - 周波数を f とかくと

$$e^{j2\pi f\left(t-\frac{1}{f}\right)} = e^{j2\pi ft}$$

$$e^{j(\omega t-2\pi)} = e^{j\omega t}$$

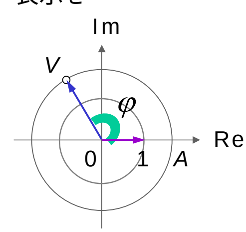
- ある時刻を基準に選ぶと、正弦波は位相で表現されます
- 正弦波の大きさは振幅で表現できます

- 例えば、電圧 $v(t)$ が正弦波形であるとき

$$v(t) = Ae^{j(\omega t+\varphi)}$$
$$= Ae^{j\varphi}e^{j\omega t}$$

- とかける
- 振幅が1の正弦波 $e^{j\omega t}$ を基準に選ぶ
- $v(t)$ のフェイザー表示を

$$V = \frac{v(t)}{e^{j\omega t}}$$
$$= Ae^{j\varphi}$$



- と定義する

正弦波に対する微分演算子

$$\frac{d}{dt}e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}$$

- 正弦波を時間微分することは、$j\omega$ をかけることに等しい
  - 線形代数学のことばでいうと、正弦波は微分演算子の固有ベクトルであり、固有値が$j\omega$だということ

いま

$$v(t) = Ae^{j(\omega t+\varphi)} = Ae^{j\varphi}e^{j\omega t}$$

ならば

$$\frac{d}{dt}v(t) = j\omega Ae^{j\varphi}e^{j\omega t}$$

- フェイザーとは基準正弦波で割り算した量だから、時間微分するってことは、フェイザーに $j\omega$をかけることだ

$$\int e^{j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega}e^{j\omega t}$$

- 積分は微分の逆演算だ
- 正弦波を時間で積分することは、$j\omega$で割り算することに等しい

- $V = Ae^{j\varphi}$ というフェイザーで表現される正弦波を微分した結果は

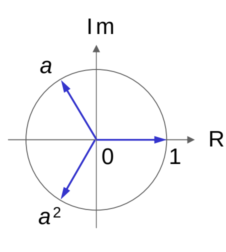
$$j\omega V$$

- と表現される。
- 積分した結果は

$$\frac{V}{j\omega}$$

- と表わされる

1の原始根



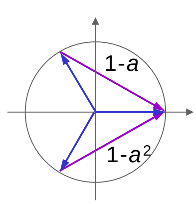
- ある数 a $(\neq 1)$ がある。a^1, a^2, a^3, ・・・ をつくるとき、n 乗して初めて1となる a を1の原始 n 乗根という。
- 1の原始3乗根

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+j\sqrt{3}}{2}$$

$$a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1) = 0$$

$$\therefore\ 1 + a + a^2 = 0$$

- 蛇足



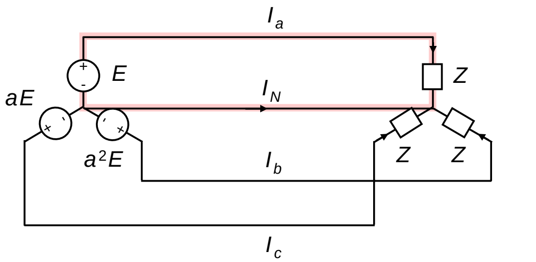
$$a^{-1} = a^2 \qquad a^{-2} = a$$

$$1 - a = 1 - \frac{-1+j\sqrt{3}}{2} = \frac{3-j\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$1 - a^2 = 1 - \frac{-1-j\sqrt{3}}{2} = \frac{3+j\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\therefore\ (1-a)(1-a^2) = 3$$

対称Y－Y回路

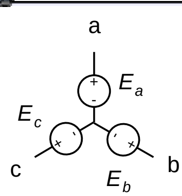


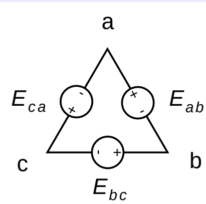
$$\left.\begin{aligned} E &= ZI_a \\ a^2E &= ZI_b \\ aE &= ZI_c \end{aligned}\right\} \therefore\ (1+a+a^2)E = Z(I_a+I_b+I_c) = 0$$

KCL tells that $I_a + I_b + I_c + I_N = 0$

Hence $I_N = 0$

Y形起電力とΔ形起電力





$E_a = E$ (reference)

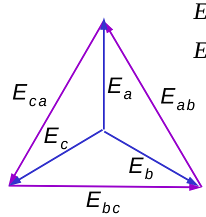
$E_b = a^2E$

$E_c = aE$

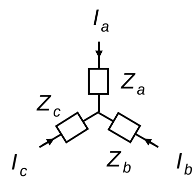
$$E_{ab} = E_a - E_b = E - a^2E = (1-a^2)E_a$$

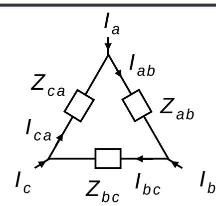
$$E_{bc} = E_b - E_c = a^2E - aE = (1-a^{-1})a^2E = (1-a^2)E_b$$

$$E_{ca} = E_c - E_a = aE - E = (1-a^{-1})aE = (1-a^2)E_c$$



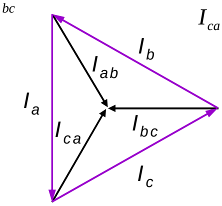
Y形負荷とΔ形負荷



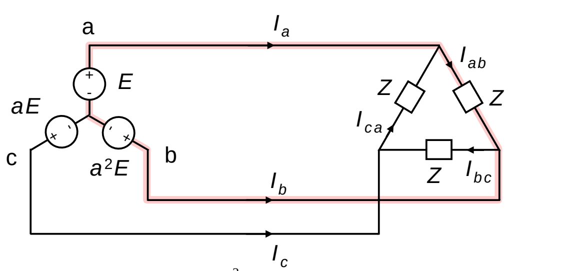


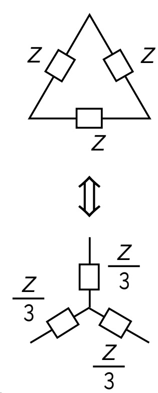
$$I_a = I_{ab} - I_{ca} = I - aI = (1-a)I_{ab}$$
$$I_b = I_{bc} - I_{ab} = a^2 I - I = (1-a^{-2})a^2 I = (1-a)I_{bc}$$
$$I_c = I_{ca} - I_{bc} = aI - a^2 I = (1-a)aI = (1-a)I_{ca}$$

$I_{ab} = I$ (reference)
$I_{bc} = a^2 I$
$I_{ca} = aI$



対称Y－Δ回路と負荷のΔY変換





$$E_{ab} = E_a - E_b = (1-a^2)E_a$$
$$E_{bc} = E_b - E_c = (1-a^2)E_b$$
$$E_{ca} = E_c - E_a = (1-a^2)E_c$$

$$I_a = I_{ab} - I_{ca} = (1-a)I_{ab}$$
$$I_b = I_{bc} - I_{ab} = (1-a)I_{bc}$$
$$I_c = I_{ca} - I_{bc} = (1-a)I_{ca}$$

さて

$$E_{ab} = ZI_{ab} \quad \therefore \quad (1-a^2)E_a = Z\frac{I_a}{1-a} \quad \therefore \quad E_a = Z\frac{I_a}{(1-a)(1-a^2)} = \frac{Z}{3}I_a$$

In the same way, $E_b = \frac{Z}{3}I_b$ and $E_c = \frac{Z}{3}I_c$