Wigner の定理のいろいろな拡張

森 迪也　(東大数理/理研 iTHEMS)*

概　要

Wigner のユニタリ反ユニタリ定理や Uhlhorn の定理の拡張について概説する．

1 Wigner の定理と Uhlhorn による拡張

H を複素 Hilbert 空間として，$P(H)$ で H 上の階数 1 の（直交）射影作用素（つまり $P = P^2 = P^*$ なる作用素）全体を表す．（Hilbert 空間論をよく知らない方は，n を正の整数として，$H = \mathbb{C}^n$ である場合のみ考えても差し支えない．その場合は，$P(H)$ は階数 1 の複素 $n \times n$ 射影行列全体のことだと思ってよい．）$P(H)$ は H の射影空間，すなわち H の 1 次元複素部分空間全体のなす集合と同一視できる．（この対応は，H の 1 次元部分空間に対し，それを像とする射影が唯一つ存在する，ということを用いて得られる．）

階数有限の作用素 A に対し，$\operatorname{Tr} A$ で A のトレースを表すことにしよう．V_1, V_2 を複素ベクトル空間とするとき，写像 $T\colon V_1 \to V_2$ が反線形であるとは，任意の $v, w \in V_1$ および $a, b \in \mathbb{C}$ に対し $T(av + bw) = \overline{a}Tv + \overline{b}Tw$ となることを意味する．

この講演のテーマである，**Wigner の**（ユニタリ反ユニタリ）**定理**とは，以下の定理のことである．

定理 1 (Wigner [67])**.** 全単射 $\phi\colon P(H) \to P(H)$ が条件

$$\operatorname{Tr} PQ = \operatorname{Tr} \phi(P)\phi(Q) \quad (P, Q \in P(H)) \tag{1}$$

を満たすならば，次が成り立つ．

(W) H 上のあるユニタリ（複素線形全射等距離写像）または反ユニタリ（反線形全射等距離写像）$U\colon H \to H$ が存在して，

$$\phi(P) = UPU^{-1} \quad (P \in P(H)) \tag{2}$$

となる．

逆に，H 上のユニタリまたは反ユニタリ U に対し，(2) により定まる $P(H)$ 上の写像 ϕ が条件 (1) を満たすということは明らかである．Wigner の定理は量子力学の数学的基礎付けにおいて重要とされる定理の一つであるが，その物理学的意味についてはここでは深く立ち入らない．興味のある方はたとえば [9] をまず見るとよいだろう．

---

* e-mail: `mmori@ms.u-tokyo.ac.jp`

本研究は科研費 (課題番号:22K13934) の助成を受けたものである．

かんたんな計算により，条件 (1) は次の条件と同値であることがわかる．

$$\|P-Q\| = \|\phi(P)-\phi(Q)\| \quad (P, Q \in P(H)). \tag{3}$$

ただし $\|\cdot\|$ は作用素ノルムを表す．ゆえに，Wigner の定理は $P(H)$ 上の全射等距離写像を特徴づけている，とも考えられる．（作用素ノルムについてよく知らない方に向けて補足すると，$P(H)$ に定まる別の自然な距離，たとえば Fubini–Study 距離について等距離であるという条件も (1) と同値である．）

Uhlhorn は，Wigner より強力な次の定理（**Uhlhorn の定理**）を与えた．射影 P, Q に対し，$\mathrm{Tr}\, PQ = 0$ であること，$PQ = 0$ であること，P の像の元と Q の像の元のどの組も直交していること はいずれも同値であることに注意しよう．

定理 2 (Uhlhorn [65])**.** $\dim H \geq 3$ とする．全単射 $\phi\colon P(H) \to P(H)$ が条件

$$PQ = 0 \Longleftrightarrow \phi(P)\phi(Q) = 0 \quad (P, Q \in P(H)) \tag{4}$$

を満たすならば，(W) が成り立つ．

つまり，$\dim H \geq 3$ でさえあれば，(1) よりもはるかに弱い仮定 (4) から Wigner の定理と同じ結論がいえてしまうのである．ここで，$\dim H \geq 3$ であるという仮定は本質的である．これを説明するために，$\dim H = 2$ の場合を考えよう．このとき，$P(H)$ は 2 次元球面（Bloch 球面）と同一視できて，しかも $P(H)$ における直交性は球面上で対蹠点であるという関係に対応する，という事実がある．これより，$\dim H = 2$ の場合に Uhlhorn の定理が成り立たないことは直ちにわかる．

Wigner の定理や Uhlhorn の定理は簡明な形をしていて，量子力学的なモチベーションからだけでなく，純粋数学的観点からも興味深い．そのような背景（あるいはもっと率直に書けば，量子力学と関係していると言い張ることで，純粋に数学的な内容であっても研究の価値を認めてもらいやすいという理由）から，これらの定理の設定をすこし変えた場合にどのような結論が成り立つか，といったタイプの研究が多数なされてきた．その中には，講演者が関わったものもある．この講演は，そのような研究のいくつかについて説明することを目標とする．講演者の研究に近い話題がメインとなり，関連する研究を網羅的に説明することはできない，という点はご容赦いただきたい．重要な結果が抜けている可能性も否定できないが，読者がそう感じたとしたらそれは講演者の知識が足りていないからである．よろしければ講演者に詳しく教えていただきたい．

本講演に類似するテーマを扱った文献としては Chevalier による概説 [9] や，Pankov による本 [46] が挙げられる．本講演では，これらの文献に載っていないような最近の話題にも焦点をおいて説明を行いたい．

2　全単射性や「$\Longleftrightarrow$」の部分の仮定を弱めてみる

Wigner の定理や Uhlhorn の定理において，ϕ の単射性は (1) や (4) から自動的に従う．Wigner の定理においては，全射性の仮定を外した場合も，(W) と類似の結論が成り立つことが知られている．

定理 3. 写像 $\phi\colon P(H) \to P(H)$ が条件 (1) を満たすならば，ある複素線形または反線形な等距離写像 $U\colon H \to H$ が存在して，

$$\phi(P) = UPU^* \quad (P \in P(H))$$

が成り立つ [*1]．

定理 1 や定理 3 の証明については，初等的な方法を含めいろいろなアプローチが可能なので，意欲のある方は自分で考えてみてもよいかもしれない．ところで，これらの定理の証明を最初に与えたのが誰か，というのは少々ややこしい問題である．詳しくはたとえば [9], [23], [15] を参照されたい．

Uhlhorn の定理においては，$\dim H = \infty$ の場合は全射性の仮定が本質的である．たとえば，テンソル積を用いて $\phi\colon P(H) \to P(H \otimes H)$ を $\phi(P) = P \otimes P$ で定め，さらに H と $H \otimes H$ を同一視すれば，ϕ は条件 (4) を満たすが，(2) とは形がだいぶ異なっている．ところが，$3 \le \dim H < \infty$ の場合には，Uhlhorn の定理の全射性の仮定をはずしてもよい．さらに，条件 (4) を弱めることもできる．

定理 4 (Fošner–Kuzma–Kuzma–Sze [14], Pankov–Vetterlein [48])**.** $3 \le \dim H < \infty$ とする．写像 $\phi\colon P(H) \to P(H)$ が条件

$$PQ = 0 \Longrightarrow \phi(P)\phi(Q) = 0 \quad (P, Q \in P(H)) \tag{5}$$

を満たすならば，(W) が成り立つ．

$\dim H = \infty$ の場合にも，適当な仮定を追加すれば類似の結果が成り立つ，ということが Šemrl [56] により示されている．しかし，どうやら，たとえば次の問題への答えは未だに知られていないと思われる．

問題 1. $\dim H = \infty$ とする．全単射 $\phi\colon P(H) \to P(H)$ が条件 (5) を満たすと仮定する．このとき，(W) が成り立つか．

[*1] 通常のように，H 上の有界な複素線形作用素 $T\colon H \to H$ に対し，その随伴作用素 $T^*\colon H \to H$ は，任意の $g, h \in H$ に対し $\langle Tg, h\rangle = \langle g, T^*h\rangle$ なるただ一つの有界複素線形作用素を表す．いっぽう，$T\colon H \to H$ が有界な反線形作用素のとき，$T^*\colon H \to H$ は任意の $g, h \in H$ に対し $\langle Tg, h\rangle = \overline{\langle g, T^*h\rangle}$ なるただ一つの有界反線形作用素を表す．ユニタリまたは反ユニタリ U に対しては $U^* = U^{-1}$ であることに注意せよ．

3　等距離である/直交性を保つという仮定を弱めてみる

3.1　ひとつの距離を保つ写像

条件 (4) は，距離に関する次の条件に言い換えることができる．

$$\|P-Q\|=1 \iff \|\phi(P)-\phi(Q)\|=1 \quad (P,Q \in P(H)).$$

Wigner の定理と Uhlhorn の定理を見比べると，次の問題が自然に浮かび上がる．

問題 2. $0<c\le 1$ を実数とする．全単射 $\phi\colon P(H)\to P(H)$ が条件

$$\|P-Q\|=c \iff \|\phi(P)-\phi(Q)\|=c \quad (P,Q\in P(H)) \tag{6}$$

を満たすとする．このとき，(W) が成り立つか？

Uhlhorn の定理より，$\dim H\ge 3$ かつ $c=1$ であればこの問題への答えは肯定的であるが，$(\dim H, c)=(2,1)$ の場合には否定的である，ということは既に述べた．Gehér [17] はこの問題を「$\dim H=2$ かつ $c\notin\{2^{-1/2},1\}$」または「$\dim H\ge 3$ かつ $c\le 2^{-1/2}$」の場合に肯定的に解決した．また，「$\dim H=2$ かつ $c=2^{-1/2}$」の場合は，条件 (6) を満たす全単射の一般形を与えた（この場合は問題の主張は偽である）．講演者は Gehér との共同研究 [18] において，残された場合について問題を肯定的に解決した．以上をまとめれば，次のようになる．

定理 5. 問題 2 の主張が真であるための必要十分条件は「$\dim H=2$ かつ $c\notin\{2^{-1/2},1\}$」または「$\dim H\ne 2$」である．

実 Hilbert 空間などの設定における類似の研究については，[33], [17] を参照せよ．

3.2　非拡大/非縮小写像

まず，一般の距離空間の設定で改めて用語を整理しておく．(X,d) を距離空間とする．写像 $\phi\colon X\to X$ が条件

$$d(x,y)=d(\phi(x),\phi(y)),\quad x,y\in X$$

を満たすとき，ϕ は**等距離**写像であるという．等距離写像は単射であること，また全射な等距離写像の逆写像は等距離写像であることに注意．写像 $\phi\colon X\to X$ が条件

$$d(x,y)\ge d(\phi(x),\phi(y)) \quad (\text{resp. } d(x,y)\le d(\phi(x),\phi(y))),\quad x,y\in X$$

を満たすとき，ϕ は**非拡大**写像（resp. **非縮小**写像）であるという．これらは等距離写像の一般化である．下記の研究の動機のひとつは，距離空間の幾何学において基本的な次の定理である [8, Theorems 1.6.14 and 1.6.15].

定理 6. (X,d) を compact 距離空間とする．写像 $\phi\colon X\to X$ が (i) 非縮小である，または (ii) 非拡大かつ全射である ならば，ϕ は全射な等距離写像である．

これを念頭に, Wigner の定理について改めて考えよう．以下, $P(H)$ に距離 $d(P,Q) := \|P-Q\|$ を与えた空間を考えることにする．Wigner の定理は $P(H)$ における等距離写像の特徴づけを与える．では，非拡大写像や非縮小写像について類似した特徴づけは可能だろうか．$\dim H < \infty$ であれば，$P(H)$ は compact であり，また多様体の構造を持つ．ゆえに，定理 6, 定理 1 と領域不変性（invariance of domain, Euclid 空間からそれ自身への連続単射は開写像であるということ）から次が得られる．

定理 7. $\dim H < \infty$ とする．写像 $\phi\colon P(H) \to P(H)$ が (i) 非縮小である，または (ii) 非拡大かつ全射である，または (iii) 非拡大かつ単射である ならば，(W) が成り立つ．

全射性や単射性を仮定せずに，非拡大写像についてもう少し考えてみよう．ϕ の像 $\phi(P(H))$ が $P(H)$ の小さい ball に含まれるような写像 $\phi\colon P(H) \to P(H)$ を考えれば，非拡大写像はごまんと存在し，その一般形を得るのは困難であるということが容易にイメージできるだろう．いっぽうで, $\phi(P(H))$ に関する弱い仮定のもとで, 講演者と Šemrl は以下に説明する結果を得た．

$\dim H = n < \infty$ のとき，H は $\mathbb{C}^n$ と同一視できる．また，$P(\mathbb{C}^n)$ は階数 1 の $n \times n$ 射影行列全体の集合と同一視できる．$\Phi\colon P(\mathbb{C}^n) \to P(\mathbb{C}^n)$ を，$P = (p_{ij})_{1\le i,j\le n} \in P(\mathbb{C}^n)$ に対し $\Phi(P) = (|p_{ij}|)_{1\le i,j\le n} \in P(\mathbb{C}^n)$ を返す写像と定める．この写像 Φ が非拡大写像であり，全射でも単射でもないことは容易に示せる．

定理 8 (森–Šemrl [44])**.** $3 \le n < \infty$ とする．$\phi\colon P(\mathbb{C}^n) \to P(\mathbb{C}^n)$ を非拡大写像とする．ある $P_1, P_2, \dots, P_n \in \phi(P(\mathbb{C}^n))$ について，その総和が単位行列になると仮定する．ϕ が等距離写像でないならば，あるユニタリ $U, V\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ が存在して

$$\phi(P) = U\Phi(VPV^{-1})U^{-1} \quad (P \in P(\mathbb{C}^n)) \tag{7}$$

が成り立つ．

Wigner の定理を拡張する多くの研究において，結論として得られるのはたいてい (W) とよく似た形の写像である．ところが，この定理の結論では別のタイプの写像が現れており，講演者にとってかなり興味深い．

$\dim H = \infty$ の場合も類似の結果が得られるが，無限を扱う必要があるため適当な修正が必要となる．詳しくは [44, Proposition 3.3] を参照されたい．それを用いることで次が示せる．

定理 9. $\dim H \ge 3$ とする．（$\dim H = \infty$ でもよい．）$\phi\colon P(H) \to P(H)$ が (i) 非縮小かつ全射である，または (ii) 非拡大かつ全射である ならば，(W) が成り立つ．

なお，$\dim H = \infty$ の場合，非縮小，あるいは非拡大かつ単射であるが，(2) や (7) と似た形をしていない写像 $\phi\colon P(H) \to P(H)$ を構成できる [44, Examples 4.1, 4.2].

3.3 正定値と限らない内積

A を H 上の可逆な有界複素線形写像とする．Hilbert 空間 H の通常の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ のかわりに，$\langle A\,\cdot,\cdot\rangle$ を考えるとどうなるだろうか．このような設定における Wigner の定理の拡張は Bracci, Morchio, Strocchi [6], Molnár [37] により，Uhlhorn の定理の拡張は van den Broek [7], Molnár [41] により与えられた．[41] の結果を紹介しよう．

定理 10 (Molnár [41]). $\dim H \geq 3$ とする．全単射 $\phi\colon P(H) \to P(H)$ が条件

$$PAQ = 0 \iff \phi(P)A\phi(Q) = 0 \quad (P, Q \in P(H))$$

を満たすならば，H 上のある複素線形または反線形な有界全単射 $U\colon H \to H$ が存在して，U^*AU は A のスカラー倍であり，かつ任意の $P \in P(H)$ に対し $\phi(P)$ は UPU^* の（正の）スカラー倍となる．

なお，Molnár はこの結果を後述の定理 15 から導いた．有限次元かつ代数的な（係数体が複素数と限らない）設定における類似の結果については [49] を参照せよ．

4 Hilbert 空間のかわりに Banach 空間を考えてみる

Hilbert 空間を Banach 空間に置き換えた場合に，Wigner や Uhlhorn の定理の類似が成り立つか，というのは自然な疑問であるが，問題設定の方法は複数ある．そのような研究のいくつかを紹介しよう．

4.1 Semi-inner product

Wigner の定理は，次と同値であることがかんたんに確かめられる．

定理 11. 全射 $f\colon H \to H$ が

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle f(x), f(y)\rangle| \quad (x,\, y \in H) \tag{8}$$

を満たすならば，H 上のユニタリまたは反ユニタリ $U\colon H \to H$ および写像 $\sigma\colon H \to \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ が存在して，

$$f(x) = \sigma(x)Ux \quad (x \in H)$$

が成り立つ．

Banach 空間 X において，Hilbert 空間における内積の類似を考える方法のひとつとして，次のようなものがある．X が smooth であるということを仮定する．これはつまり，任意の $y \in X \setminus \{0\}$ に対し，$\varphi_y(y) = \|y\|$ なる双対空間の単位ベクトル $\varphi_y \in X^*$ が唯一つ存在することを意味する．そこで，$x \in X$ と y の「内積もどき」$[x, y]$ を $[x, y] := \|y\|\varphi_y(x)$ と定める．また，$y = 0$ のときは $[x, y] = 0$ と定める．これを **semi-inner product** と呼ぶ [*2]．Hilbert 空間に対する semi-inner product は通常の内積に他ならない．Banach

[*2] semi-inner product という単語をほかの意味で使うこと文献も多いため，混乱しないよう注意せよ．

空間の設定においても，semi-inner product は内積に似た性質を持つ．定理 11 の拡張として，次の定理が成り立つ．

定理 12 (Ilišević–Turnšek [30])**.** X, Y を smooth な複素 Banach 空間とする．全射 $f\colon X \to Y$ が

$$|[x,y]| = |[f(x), f(y)]| \quad (x,\, y \in X)$$

を満たすならば，ある複素線形または反線形な全射等距離写像 $U\colon X \to Y$ および写像 $\sigma\colon X \to \mathbb{T}$ が存在して，

$$f(x) = \sigma(x)Ux \quad (x \in X)$$

が成り立つ．

4.2 Phase-isometry

まず定理を一つ紹介しよう．

定理 13 (Ilišević–Omladič–Turnšek [27])**.** X, Y を実 Banach 空間とする．全射 $f\colon X \to Y$ が

$$\{\|x+y\|, \|x-y\|\} = \{\|f(x)+f(y)\|, \|f(x)-f(y)\|\} \quad (x,\, y \in X)$$

を満たすならば，ある実線形全射等距離写像 $U\colon X \to Y$ および写像 $\sigma\colon X \to \{-1, 1\}$ が存在して，

$$f(x) = \sigma(x)Ux \quad (x \in X)$$

が成り立つ．

これは Maksa, Páles [34] による問題へのひとつの解答を与えている．X, Y が実 Hilbert 空間の場合を考えると，この定理から Wigner の定理の「実 Hilbert 空間バージョン」が導かれる．そのような意味で，この定理は Wigner の定理と関係している．

この定理の仮定を満たす写像は **phase-isometry** と呼ばれる．こういった話題については，特に中国のグループが近年多数の論文を書いているようだ．たとえば [25], [26] およびこれらの論文の文献リストを参照されたい．

4.3 Birkhoff–James 直交性

Banach 空間の設定で直交性の類似を考える方法はいくつかあるが，この節では **Birkhoff–James 直交性**というものを扱う．X を複素 Banach 空間とする．X の射影空間を $P(X)$ で表す．つまり $P(X)$ の各元は X の複素 1 次元部分空間である．ベクトル $x \in X \setminus \{0\}$ に対し，x の張る 1 次元部分空間を $[x] \in P(X)$ で表す．$x, y \in X \setminus \{0\}$ に対し

$$[x] \perp_{BJ} [y] \iff \text{任意の } \lambda \in \mathbb{C} \text{ に対し } \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$$

と定める．$\perp_{BJ}$ は $P(X)$ 上の二項関係として代表元 x, y のとり方によらず定まることに注意しよう．この関係は，Hilbert 空間に対しては通常の直交性と一致する．Banach

空間の設定では $P \perp_{BJ} Q \iff Q \perp_{BJ} P$ は一般には成り立たないことに注意が必要である．次の問題を考えよう．

問題 3. X, Y を複素 Banach 空間とし，$\dim X \geq 3$ を仮定する．全単射 $\phi\colon P(X) \to P(Y)$ が条件

$$P \perp_{BJ} Q \iff \phi(P) \perp_{BJ} \phi(Q) \quad (P, Q \in P(X))$$

を満たすと仮定する．このとき, ある複素線形または反線形な全射等距離写像 $U\colon X \to Y$ が存在し,

$$\phi([x]) = [Ux] \quad (x \in X \setminus \{0\})$$

が成り立つか.

$X = Y$ が Hilbert 空間のとき，これは Uhlhorn の定理の設定とぴったり合致することが容易に確かめられる．この問題については部分的な解答が知られている．

定理 14 (Blanco–Turnšek [4], Arambašić–Guterman–Kuzma–Rajić–Zhilina [1])**.** X, Y が smooth ~~かつ X が反射的~~ならば，問題 3 への答えは肯定的である．

Birkhoff–James 直交性を保つ写像については，係数体が実数の場合も含め，近年活発に研究が行われている．（問題 3 とは少し設定が異なるものも含まれるが,）たとえば [31], [50], [61], [68] を参照せよ．

4.4　ベキ等作用素

この節では，射影のかわりにベキ等作用素（つまり，有界線形作用素 P で $P = P^2$ を満たすもの）について考えてみよう．以下，X を複素 Banach 空間とする．$I(X)$ で X 上の階数 1 のベキ等作用素全体を表す．

$I(X)$ 上の写像について Wigner の定理の類似を与えた研究としては，たとえば [39], [64] がある．ここでは，Uhlhorn の定理の類似を紹介しよう．

定理 15 (Molnár [41])**.** $\dim X = \infty$ とする．全単射 $\phi\colon I(X) \to I(X)$ が条件

$$PQ = 0 \iff \phi(P)\phi(Q) = 0 \quad (P, Q \in I(X))$$

を満たすならば，ある複素線形または反線形な有界全単射 $T\colon X \to X$ が存在し,

$$\phi(P) = TPT^{-1} \quad (P \in I(X))$$

が成り立つ.

実は，先に登場した Molnár の定理 10 の証明は，この定理 15 に基づいている．また，Molnár は定理 15 の別の応用として，Uhlhorn の定理の以下に示す形の拡張も証明した．X の射影空間 $P(X)$ および，双対空間 X^* の射影空間 $P(X^*)$ の両方に着目する．

$x \in X \setminus \{0\}$, $f \in X^* \setminus \{0\}$ に対し，

$$[x] \perp [f] \iff f(x) = 0$$

と定めることにする．このとき，$P \in P(X)$, $Q \in P(X^*)$ に対する関係 $P \perp Q$ は代表元 x, f のとり方に依存せずに定まることに注意しよう．

定理 16 (Molnár [41])**.** $\dim X = \infty$ とする．全単射 $\phi\colon P(X) \to P(X)$, $\psi\colon P(X^*) \to P(X^*)$ が条件

$$P \perp Q \iff \phi(P) \perp \psi(Q) \quad (P \in P(X), Q \in P(X^*))$$

を満たすならば，ある複素線形有界全単射 $T\colon X \to X$ が存在し，

$$\phi([x]) = [Tx] \quad (x \in X \setminus \{0\}), \quad \psi([f]) = [f \circ T^{-1}] \quad (f \in X^* \setminus \{0\})$$

が成り立つか，あるいはある反線形有界全単射 $T\colon X \to X$ が存在し，

$$\phi([x]) = [Tx] \quad (x \in X \setminus \{0\}), \quad \psi([f]) = [\overline{f \circ T^{-1}}] \quad (f \in X^* \setminus \{0\})$$

が成り立つ．

ところで，定理 15 を有限次元の設定で考えると，$n \times n$ 行列に関する話に帰着される．この場合には，複素数体に限らぬ一般の体の設定を考えてもよく，また仮定を弱めることもできる，ということが Šemrl により示された．

定理 17 (Šemrl [52])**.** $n \geq 3$ を整数，$\mathbb{F}$ を体とする．$\mathbb{F}$ の元を成分とする階数 1 の $n \times n$ ベキ等行列全体を $\mathcal{I}$ と表す．写像 $\phi\colon \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ が

$$PQ = 0 \Longrightarrow \phi(P)\phi(Q) = 0 \quad (P, Q \in \mathcal{I})$$

を満たすならば，ある $n \times n$ 正則行列 A およびゼロでない準同型 $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ が存在して，

$$\phi((p_{ij})_{1\leq i,j\leq n}) = A((\sigma(p_{ij}))_{1\leq i,j\leq n})A^{-1} \quad ((p_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{I})$$

が成り立つ．

すこし異なるが類似した研究は [54], [55] でもなされている．また，Šemrl [51] は定理 15 および定理 10 の「四元数 Hilbert 空間バージョン」も与えた．

5 別の射影のあつまりを考えてみる

5.1 階数 k の射影

$1 \leq k < \dim H$ を整数とする．Wigner の定理では階数 1 の射影のあつまりを考えるが，この節ではより一般の階数 k の射影を考えてみたい．H 上の階数 k の射影全体を $P_k(H)$ と表そう．Wigner の定理の類似を考えるにはどうすればよいだろうか．これにはいくつもの方法が考えられる．Molnár は以下の結果を示した．

定理 18 (Molnár [40], [42]). $\phi\colon P_k(H) \to P_k(H)$ を写像とする．任意の $P, Q \in P_k(H)$ に対し，H 上のあるユニタリ V が存在して，$\phi(P) = VPV^{-1}$ かつ $\phi(Q) = VQV^{-1}$ となる [*3]，と仮定する．このとき，次が成り立つ．

(M) H 上の複素線形または反線形な等距離写像 U が存在して，

$$\phi(P) = UPU^* \quad (P \in P_k(H))$$

となるか，あるいは（$2k = \dim H$ かつ）

$$\phi(P) = I - UPU^* \quad (P \in P_k(H))$$

となる．

$k = 1$ の場合，定理 18 は定理 3 と同等の主張であることがかんたんに確かめられる．しかし，$k \geq 2$ の場合の定理 18 の仮定は，Wigner の定理の仮定と見比べてみるとどうも強すぎるように見える．Wigner の定理ともっと形の似ている次の定理は Gehér による．

定理 19 (Gehér [16]). 写像 $\phi\colon P_k(H) \to P_k(H)$ が条件

$$\operatorname{Tr} PQ = \operatorname{Tr} \phi(P)\phi(Q) \quad (P, Q \in P_k(H))$$

を満たすならば，(M) が成り立つ．

定理 19 の仮定は (1) と同じ形であり，定理 18 の仮定よりずっと弱い．定理 19 の証明の第一ステップは，Hilbert–Schmidt 内積と関係した $\operatorname{Tr} PQ$ という値を使うことで Hilbert 空間の幾何学を応用できる，という事実である．これに関連して，H 上の射影全体のなす空間における Hilbert–Schmidt 距離についての等距離写像を調べた研究として [66] が挙げられる．

では，(1) ではなく，作用素ノルムについて等距離写像である，という (3) の形の仮定をおいた場合はどうなるだろうか．この場合も同様のことがいえる．

定理 20. 全射 $\phi\colon P_k(H) \to P_k(H)$ が条件

$$\|P - Q\| = \|\phi(P) - \phi(Q)\| \quad (P, Q \in P_k(H))$$

を満たすならば，(M) が成り立つ（この場合，全射性より U はユニタリまたは反ユニタリである）．

この定理は，Botelho, Jamison, Molnár [5] が部分的に，Gehér, Šemrl [19] が一般の場合を示した．Gehér, Šemrl [20] はさらに，階数 ∞ の射影に関する類似の定理を示した．定理 20 において，$\dim H < \infty$ の場合は全射性の仮定をはずせるが，そうでない場合は全射性の仮定は本質的である．

[*3] 論文 [40] ではこの条件を「principal angles を保つ」ということばで表現している．

以上に挙げたものとは異なった仮定を考えている研究の例については，Pankov の本 [46] や Šemrl の最近の論文 [57] を参照されたい．

ここまで Wigner の定理の拡張について述べた．Uhlhorn の定理の拡張についても定理をひとつ紹介しておく．

定理 21 (Győry [22], Šemrl [53], Gehér–Šemrl [19])**.** $2k < \dim H$ とする．全射 $\phi\colon P_k(H) \to P_k(H)$ が条件

$$PQ = 0 \iff \phi(P)\phi(Q) = 0 \quad (P, Q \in P_k(H))$$

を満たすならば，あるユニタリまたは反ユニタリ $U\colon H \to H$ が存在して，

$$\phi(P) = UPU^{-1} \quad (P \in P_k(H))$$

が成り立つ．

この定理において，$\dim H < \infty$ の場合は全射性の仮定を外せる [45]．また，仮定を弱めて

$$PQ = 0 \Longrightarrow \phi(P)\phi(Q) = 0 \quad (P, Q \in P_k(H))$$

という条件を考えた場合についても研究がなされている [47] が，さらなる研究の余地もありそうだ．

5.2　作用素環への拡張

前節で紹介したような定理について，その作用素環の設定における類似を考えることは自然である．この節では，そういった研究の例を紹介する．この節に限って，作用素環に関する基本的なことばを，詳しく説明せずに使ってしまう場面があることに留意されたい．

$\mathcal{M}$ を von Neumann 環とする．$\mathcal{M}$ の射影作用素全体からなる集合を $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ と表す．$\mathcal{P}(\mathcal{M})$ の元 P に対して，その central support projection を $Z(P)$ と表す．本講演においては，$\mathcal{P}(\mathcal{M})$ の連結成分を $\mathcal{M}$ の **Grassmann 空間**と呼ぶ．また，Grassmann 空間 $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ の任意の元 $P \in \mathcal{P}$ に対して $Z(P) = Z(I - P) = I$ が成り立つとき，$\mathcal{P}$ は**よい Grassmann 空間**であるということにする．$1 \leq k < \dim H$ であるとき，前節で考えた空間 $P_k(H) \subset B(H)$ がよい Grassmann 空間の例となる．より一般に，$\mathcal{M}$ が semifinite な因子環，$\tau\colon \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ が normal semifinite faithful tracial weight，$c \in (0, \tau(I))$ であるとき，$\tau(P) = c$ であるような射影 $P \in \mathcal{M}$ の全体 $\mathcal{P}_c(\mathcal{M}, \tau)$ は，（空集合でなければ）よい Grassmann 空間の例である．

定理 19 の一般化として次が成り立つ．

定理 22 (Qian–Wang–Wu–Yuan [63])**.** $\mathcal{M}$ を semifinite な因子環, $\tau\colon \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ を normal semifinite faithful tracial weight，$c \in (0, \tau(I))$, $2c \neq \tau(I)$ とする．写像 $\phi\colon \mathcal{P}_c(\mathcal{M}, \tau) \to$

$\mathcal{P}_c(\mathcal{M},\tau)$ が条件

$$\tau(PQ)=\tau(\phi(P)\phi(Q)) \quad (P,Q\in\mathcal{P}_c(\mathcal{M},\tau))$$

を満たすと仮定する．このとき，ϕ は σ-weak 連続な単射 Jordan $*$ 準同型 $J\colon \mathcal{M}\to\mathcal{M}$ に拡張する [*4].

この定理は，全射性の仮定を追加した場合については 2000 年の段階で Molnár [38] が示している．Gu, Wu, Yuan [21] は有限でない射影を元に持つ Grassmann 空間について類似の結果を示した．

定理 20 の拡張については，因子環と限らない一般の von Neumann 環の設定で，講演者は以下の定理を得た．これについて少し詳しく説明しよう．

定理 23 (森 [43]). $\mathcal{P},\mathcal{Q}$ をそれぞれ von Neumann 環 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ のよい Grassmann 空間とする．全射 $\phi\colon \mathcal{P}\to\mathcal{Q}$ が条件

$$\|P-Q\|=\|\phi(P)-\phi(Q)\| \quad (P,Q\in\mathcal{P})$$

を満たすならば，ある Jordan $*$ 同型 $J\colon\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ と $\mathcal{N}$ の central projection $E\in\mathcal{P}(\mathcal{N})$ が存在して，

$$\phi(P)=EJ(P)+(I-E)J(I-P) \quad (P\in\mathcal{P})$$

が成り立つ．

この定理において，有限次元の場合を除き，全射性の仮定は本質的である．

先行研究である Gehér と Šemrl の論文 [20] においては，ふたつの射影作用素に対し，それらをむすぶ適当な測地線が一意的に存在するための条件を考える，というアイデアが非常に重要な位置を占める．定理 23 の証明は，このアイデアを，以下のふたつの結果と組み合わせることで与えられる．

定理 24 (羽鳥–Molnár [24]). $\mathcal{M},\mathcal{N}$ を von Neumann 環，$\mathcal{U}(\mathcal{M}),\mathcal{U}(\mathcal{N})$ をそれぞれのユニタリ群とする．全射 $\phi\colon\mathcal{U}(\mathcal{M})\to\mathcal{U}(\mathcal{N})$ が条件

$$\|U-V\|=\|\phi(U)-\phi(V)\| \quad (U,V\in\mathcal{U}(\mathcal{M}))$$

を満たすならば，ある Jordan $*$ 同型 $J\colon\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ と $\mathcal{N}$ の central projection $E\in\mathcal{P}(\mathcal{N})$ が存在して，

$$\phi(U)=\phi(I)(EJ(U)+(I-E)J(U)^*) \quad (U\in\mathcal{U}(\mathcal{M}))$$

が成り立つ．

[*4] von Neumann 環のあいだの複素線形写像 $J\colon\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ が **Jordan $*$ 準同型**であるとは，任意の $x\in\mathcal{M}$ に対し $J(x^2)=J(x)^2$ かつ $J(x^*)=J(x)^*$ が成り立つことを意味する．明らかに，Jordan $*$ 準同型は射影を射影に送る．また，σ-weak 連続な Jordan $*$ 準同型は，$*$ 準同型と $*$ 反準同型の「和」で表せることが知られている．詳しくは [32, Exercises 10.5.25–27] を参照せよ．

定理 25 (Dye [13])**.** $\mathcal{M},\mathcal{N}$ を I_2 型直和成分を持たない von Neumann 環とする．全単射 $\psi\colon \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to \mathcal{P}(\mathcal{N})$ が

$$PQ = 0 \iff \psi(P)\psi(Q) = 0 \quad (P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M}))$$

を満たすならば，ψ は $\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への Jordan $*$ 同型に一意的に拡張する．

なお，定理 23 を用いることで，$\mathcal{P}(\mathcal{M})$ から $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ への全射等距離写像について調べることも可能である．特に，次が成り立つ．

定理 26 (森 [43])**.** $\mathcal{M},\mathcal{N}$ を I_1 型直和成分を持たない von Neumann 環とする．このとき，$\mathcal{P}(\mathcal{M})$ から $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ への全射等距離写像が存在することは，$\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ が Jordan $*$ 同型であることと同値である．

さいごに，Uhlhorn の定理の von Neumann 環的類似を考えたい．より具体的な問題は以下のとおりである．

問題 4. $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ を Grassmann 空間とする．適当な仮定の下で，全単射 $\phi\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ であって

$$PQ = 0 \iff \phi(P)\phi(Q) = 0 \quad (P, Q \in \mathcal{P}) \tag{9}$$

となるものをすべて決定せよ．

この問題については，次の定理が成り立つ．

定理 27. $\mathcal{M}$ を因子環，$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ をよい Grassmann 空間とする．ある $P, Q \in \mathcal{P}$ に対し $PQ = 0$ かつ $P + Q \neq I$ が成り立つと仮定する．全単射 $\phi\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ が (9) を満たすならば，ϕ は $\mathcal{M}$ 上の Jordan $*$ 自己同型に一意的に拡張する．

この定理は，前節（I 型の場合）の定理 21 の拡張にあたる．$\mathcal{M}$ が III 型因子環の場合は，（σ-有限性を仮定すれば）$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{M}) \setminus \{0, I\}$ となるため，この定理は上述の Dye の定理から直ちに従う．残る II 型環の場合に適用可能な証明は，中国の研究グループによる一連の論文 [59], [60], [58] で与えられた．関連する論文 [62] では，Grassmann 空間やユニタリ群上の L^p 距離に関する等距離写像が扱われている．

6 その他の拡張

講演者の技量不足により今回は詳しく扱うことができないが，Wigner の定理の拡張を扱った研究として，ほかにも次のような話題があるようだ．

- Wigner の定理の仮定を近似的に満たす写像の研究．この方向での問題設定の方法は複数あるが，(1) を近似的に満たす写像の研究の例として [12] が，(8) を近似的に満たす写像の研究の例として [10], [28] が挙げられる．

- Wigner の定理の Hilbert 空間を Hilbert C*-module に一般化する，という方向の研究．たとえば，[35], [36], [2], [3], [11], [29] など．

参考文献

[1] L. Arambašić, A. Guterman, B. Kuzma, R. Rajić, S. Zhilina, What does Birkhoff–James orthogonality know about the norm? *Publ. Math. Debrecen* **102** (2023), no.1–2, 197–218.

[2] D. Bakić and B. Guljaš, Wigner's theorem in Hilbert C*-modules over C*-algebras of compact operators. *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), no.8, 2343–2349.

[3] D. Bakić and B. Guljaš, Wigner's theorem in a class of Hilbert C*-modules. *J. Math. Phys.* **44** (2003), no.5, 2186–2191.

[4] A. Blanco and A. Turnšek, On maps that preserve orthogonality in normed spaces. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **136** (2006), no.4, 709–716.

[5] F. Botelho, J. Jamison, M. Molnár, Surjective isometries on Grassmann spaces. *J. Funct. Anal.* **265** (2013), no.10, 2226–2238.

[6] L. Bracci, G. Morchio, F. Strocchi, Wigner's theorem on symmetries in indefinite metric spaces. *Comm. Math. Phys.* **41** (1975), 289–299.

[7] P.M. van den Broek, Symmetry transformations in indefinite metric spaces: a generalization of Wigner's theorem. *Phys. A* **127** (1984), no.3, 599–612.

[8] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov, "A course in metric geometry", Graduate Studies in Mathematics **33**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[9] G. Chevalier, Wigner's theorem and its generalizations. Handbook of quantum logic and quantum structures, 429–475. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2007.

[10] J. Chmieliński, On a singular case in the Hyers–Ulam–Rassias stability of the Wigner equation. *J. Math. Anal. Appl.* **289** (2004), no.2, 571–583.

[11] J. Chmieliński, D. Ilišević, M.S. Moslehian, G. Sadeghi, Perturbation of the Wigner equation in inner product C*-modules. *J. Math. Phys.* **49** (2008), no.3, 033519, 8 pp.

[12] J. Cuesta and M.M. Wolf, Are almost-symmetries almost linear? *J. Math. Phys.* **60** (2019), no.8, 082101, 7 pp.

[13] H.A. Dye, On the geometry of projections in certain operator algebras. *Ann. of Math.* (2) **61** (1955), 73–89.

[14] A. Fošner, B. Kuzma, T. Kuzma, N.-S. Sze, Maps preserving matrix pairs with zero Jordan product. *Linear Multilinear Algebra* **59** (2011), no.5, 507–529.

[15] G.P. Gehér, An elementary proof for the non-bijective version of Wigner's theorem. *Physics Letters A* **378** (2014), 2054–2057.

[16] G.P. Gehér, Wigner's theorem on Grassmann spaces. *J. Funct. Anal.* **273** (2017), no.9, 2994–3001.

[17] G.P. Gehér, Symmetries of projective spaces and spheres. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2020, no.7, 2205–2240.

[18] G.P. Gehér and M. Mori, The structure of maps on the space of all quantum pure states that preserve a fixed quantum angle. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2022, no.16, 12003–12029.

[19] G.P. Gehér and P. Šemrl, Isometries of Grassmann spaces. *J. Funct. Anal.* **270** (2016), no.4, 1585–1601.

[20] G.P. Gehér and P. Šemrl, Isometries of Grassmann spaces, II. *Adv. Math.* **332** (2018), 287–310.

[21] W. Gu, W. Wu, W. Yuan, Transition probability preserving maps on a Grassmann space in a semifinite factor. *J. Math. Anal. Appl.* **487** (2020), no.1, 123957, 7 pp.

[22] M. Győry, Transformations on the set of all n-dimensional subspaces of a Hilbert space preserving orthogonality. *Publ. Math. Debrecen* **65** (2004), no.1–2, 233–242.

[23] M. Győry, A new proof of Wigner's theorem. *Rep. Math. Phys.* **54** (2004), no.2, 159–167.

[24] O. Hatori and L. Molnár, Isometries of the unitary groups and Thompson isometries of the spaces of invertible positive elements in C^*-algebras. *J. Math. Anal. Appl.* **409** (2014), no.1, 158–167.

[25] X. Huang, J. Liu, S. Wang, The Wigner property of smooth normed spaces. *Bull. Aust. Math. Soc.* **110** (2024), no.3, 545–553.

[26] X. Huang and D. Tan, Min-phase-isometries and Wigner's theorem on real normed spaces. *Results Math.* **77** (2022), no.4, Paper No.152, 15 pp.

[27] D. Ilišević, M. Omladič, A. Turnšek, Phase-isometries between normed spaces. *Linear Algebra Appl.* **612** (2021), 99–111.

[28] D. Ilišević and A. Turnšek, Stability of the Wigner equation—a singular case. *J. Math. Anal. Appl.* **429** (2015), no.1, 273–287.

[29] D. Ilišević and A. Turnšek, On superstability of the Wigner equation. *Linear Algebra Appl.* **542** (2018), 391–401.

[30] D. Ilišević and A. Turnšek, On Wigner's theorem in smooth normed spaces. *Aequationes Math.* **94** (2020), no.6, 1257–1267.

[31] D. Ilišević and A. Turnšek, Nonlinear Birkhoff–James orthogonality preservers in smooth normed spaces. *J. Math. Anal. Appl.* **511** (2022), no.1, Paper No.126045, 10 pp.

[32] R.V. Kadison and J.R. Ringrose, "Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. II", Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1986.

[33] C.-K. Li, L. Plevnik, P. Šemrl, Preservers of matrix pairs with a fixed inner product value. *Oper. Matrices* **6** (2012), 433–464.

[34] G. Maksa and Z. Páles, Wigner's theorem revisited. *Publ. Math. Debrecen* **81** (2012), no.1–2, 243–249.

[35] L. Molnár, An algebraic approach to Wigner's unitary-antiunitary theorem. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **65** (1998), no.3, 354–369.

[36] L. Molnár, A generalization of Wigner's unitary-antiunitary theorem to Hilbert modules. *J. Math. Phys.* **40** (1999), no.11, 5544–5554.

[37] L. Molnár, Generalization of Wigner's unitary-antiunitary theorem for indefinite inner product spaces. *Comm. Math. Phys.* **210** (2000), no.3, 785–791.

[38] L. Molnár, Wigner-type theorem on symmetry transformations in type II factors. *Internat. J. Theoret. Phys.* **39** (2000), no.6, 1463–1466.

[39] L. Molnár, A Wigner-type theorem on symmetry transformations in Banach spaces. *Publ. Math. Debrecen* **58** (2001), no.1–2, 231–239.

[40] L. Molnár, Transformations on the set of all n-dimensional subspaces of a Hilbert space preserving principal angles. *Comm. Math. Phys.* **217** (2001), no.2, 409–421.

[41] L. Molnár, Orthogonality preserving transformations on indefinite inner product spaces: generalization of Uhlhorn's version of Wigner's theorem. *J. Funct. Anal.* **194** (2002), no.2, 248–262.

[42] L. Molnár, Maps on the n-dimensional subspaces of a Hilbert space preserving principal angles. *Proc. Amer. Math. Soc.* **136** (2008), no.9, 3205–3209.

[43] M. Mori, Isometries between projection lattices of von Neumann algebras. *J. Funct. Anal.* **276** (2019), no.11, 3511–3528.

[44] M. Mori and P. Šemrl, Nonexpansive and noncontractive mappings on the set of quantum pure states. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **155** (2025), no. 4, 1366–1384.

[45] M. Pankov, Geometric version of Wigner's theorem for Hilbert Grassmannians. *J. Math. Anal. Appl.* **459** (2018), no.1, 135–144.

[46] M. Pankov, "Wigner-type theorems for Hilbert Grassmannians", London Math. Soc. Lecture Note Ser., 460, Cambridge University Press, Cambridge, 2020.

[47] M. Pankov, Orthogonality preserving transformations of Hilbert Grassmannians. *Linear Algebra Appl.* **605** (2020), 180–189.

[48] M. Pankov and T. Vetterlein, A geometric approach to Wigner-type theorems. *Bull. Lond. Math. Soc.* **53** (2021), no.6, 1653–1662.

[49] L. Rodman and P. Šemrl, Orthogonality preserving bijective maps on finite dimensional projective spaces over division rings. *Linear Multilinear Algebra* **56** (2008), no.6, 647–664.

[50] S. Roy and R. Tanaka, Di-orthographs of Banach spaces that are not invariant of non-linear Birkhoff–James orthogonality preservers. *J. Math. Anal. Appl.* **533** (2024), no.1, Paper No.127990, 18 pp.

[51] P. Šemrl, Generalized symmetry transformations on quaternionic indefinite inner product spaces: an extension of quaternionic version of Wigner's theorem. *Comm. Math. Phys.* **242** (2003), no.3, 579–584.

[52] P. Šemrl, Applying projective geometry to transformations on rank one idempotents. *J. Funct. Anal.* **210** (2004), no.1, 248–257.

[53] P. Šemrl, Orthogonality preserving transformations on the set of n-dimensional subspaces of a Hilbert space. *Illinois J. Math.* **48** (2004), no.2, 567–573.

[54] P. Šemrl, Maps on idempotents. *Studia Math.* **169** (2005), no.1, 21–44.

[55] P. Šemrl, Non-linear commutativity preserving maps. *Acta Sci. Math. (Szeged)* **71** (2005), no.3–4, 781–819.

[56] P. Šemrl, Wigner symmetries and Gleason's theorem. *J. Phys. A* **54** (2021), no.31, Paper No.315301, 6 pp.

[57] P. Šemrl, Maps on Grassmann spaces preserving the minimal principal angle. *Acta Sci. Math. (Szeged)* **90** (2024), no.1–2, 109–122.

[58] W. Shi, J. Shen, Y.-N. Dou, H. Zhang, Orthogonality preserving maps on a Grassmann space in semifinite factors. *Proc. Amer. Math. Soc.* **152** (2024), no.9, 3831–3840.

[59] W. Shi, J. Shen, W. Gu, M. Ma, L^p-isometries of Grassmann spaces in factors of type

II. *J. Operator Theory* **87** (2022), no.2, 389–412.

[60] W. Shi, J. Shen, M. Ma, Ortho-isomorphisms of Grassmann spaces in semifinite factors. *Proc. Amer. Math. Soc.* **152** (2024), no.1, 223–238.

[61] R. Tanaka, Nonlinear equivalence of Banach spaces based on Birkhoff–James orthogonality, II. *J. Math. Anal. Appl.* **514** (2022), no.1, Paper No.126307, 19 pp.

[62] W. Qian, J. Shen, W. Shi, W. Wu, W. Yuan, Surjective L^p-isometries on Grassmann spaces. *Sci. China Math.* **66** (2023), no.9, 2105–2118.

[63] W. Qian, L. Wang, W. Wu, W. Yuan, Wigner-type theorem on transition probability preserving maps in semifinite factors. *J. Funct. Anal.* **276** (2019), no.6, 1773–1787.

[64] W. Qian, Z. Xiang, W. Wu, X. Yi, Surjective L^p-isometries on rank 1 idempotents. *J. Math. Anal. Appl.* **518** (2023), no.1, Paper No.126669, 11 pp.

[65] U. Uhlhorn, Representation of symmetry transformations in quantum mechanics. *Ark. Fysik* **23** (1963), 307–340.

[66] L.G. Wang, W.M. Wu, W. Yuan, Surjective L^2-isometries on the projection lattice. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* **37** (2021), no.5, 825–834.

[67] E.P. Wigner, "Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektrum", Fredrik Vieweg und Sohn, 1931.

[68] P. Wójcik, Mappings preserving B-orthogonality. *Indag. Math. (N.S.)* **30** (2019), no.1, 197–200.