

基礎材料組織学 第7回

- 前回：
- ・ 金属材料の強化機構
 - ・ 加工強化（硬化）とベイリー・ハーシュの関係
 - ・ すべり系



- 今回：
- ・ ミラー指数
 - ・ ミラー指数の一括表示
 - ・ 分解せん断応力

7.1 ミラー指数: 結晶の特定の面や方向を規定・表示する方法.

●ミラー指数の表し方

・任意の方向の表し方

①その方向と平行でかつ原点を通る直線 OP を引き, OP 上の任意の点の座標(x, y, z)を求める.

②座標(x, y, z)を各格子定数で除した値 (u, v, w)

を求める. $u = \frac{x}{a}, v = \frac{y}{b}, w = \frac{z}{c}$

③(u, v, w)が分数になる場合, u~w の分母の最小公倍数を u~w 全てに乘じ整数化する.

④(u, v, w)の括弧をカギ括弧[]に変え, カンマ「,」を省略して表す → [u v w]

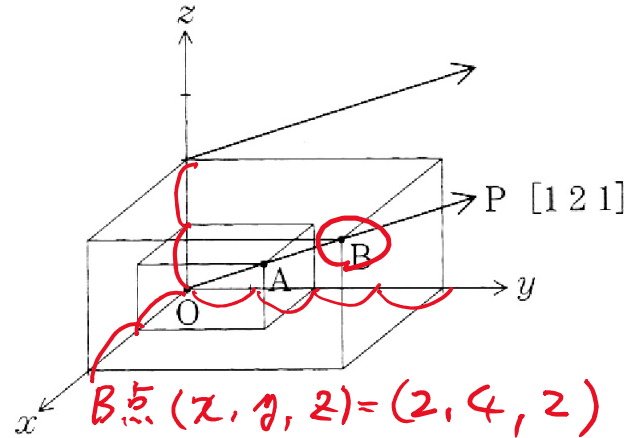


図 7.1 ミラー指数による方向の表し方

[新版 基礎機械材料学, 朝倉書店]

授業では想定上の立方晶, $a=b=c=1$

・任意の面の表し方

①面と各軸の交点座標(x, y, z)を求める.

②座標(x, y, z)を各格子定数で除した逆数(h, k, l)

を求める. $h = \frac{a}{x}, k = \frac{b}{y}, l = \frac{c}{z}$

③(h, k, l)が分数になる場合, h~l の分母の最小

公倍数を h~l 全てに乘じ整数化する.

④(h, k, l)のカンマ「,」を省略して表す → (h k l)

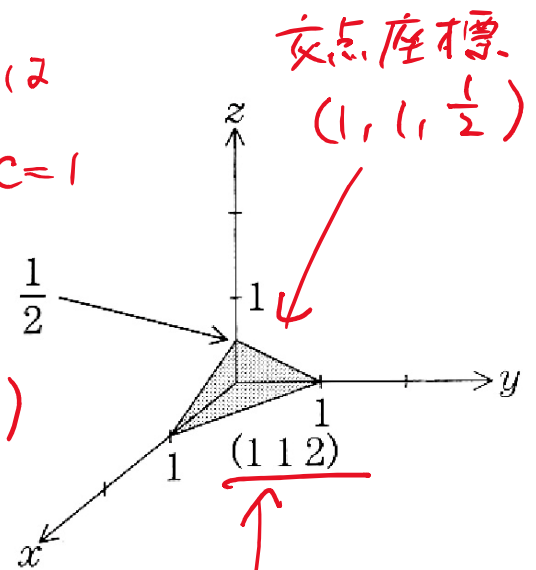


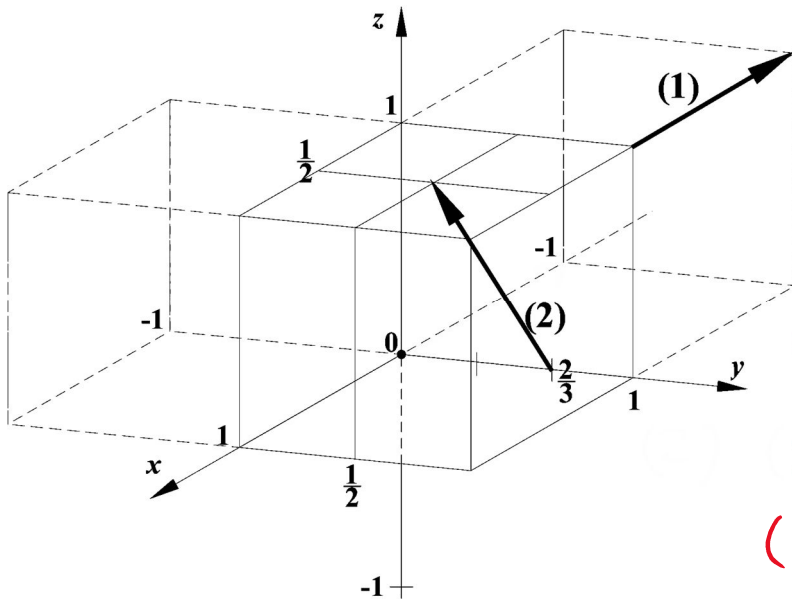
図 7.2 ミラー指数による面の表し方

[新版 基礎機械材料学, 朝倉書店]

・読み方 例, [1 1 2] → 「いち いち に 方向」

・値がマイナス: 数字上に横線を付する 例, [1 1 2] → 「いち いちばー に 方向」

・例題: 下図の方向(1), (2)および面(4), (5)をミラー指数で表せ。



$$(1) (x, y, z) = (-1, 0, 0)$$

$$(u, v, w) = (-1, 0, 0)$$

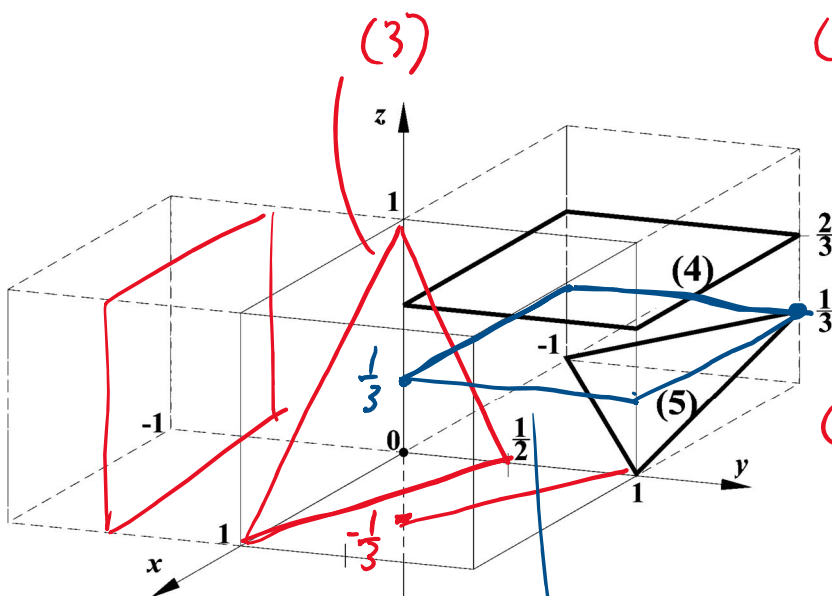
$$[uvw] = [\bar{1}00] \leftarrow$$

カンマは書かない!

$$(x, y, z) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, 1)$$

$$(u, v, w) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, 1)$$

$$[uvw] = [3\bar{1}6] \leftarrow$$



$$(3) (x, y, z) = (1, \frac{1}{2}, 1)$$

$$(h, k, l) = (1, 2, 1)$$

$$(hkl) = (121)$$

(4) → xy平面と平行
→ 無限遠方で
x・yと交わる.

$$(x, y, z) = (\infty, \infty, \frac{2}{3})$$

$$(h, k, l) = (0, 0, \frac{3}{2})$$

$$(hkl) = (003)$$

$$(hkl) = (003)$$

(5) → z軸との交点を
面を拡大して考える

$$(x, y, z) = (-1, 1, -\frac{1}{3})$$

$$(h, k, l) = (-1, 1, -3)$$

$$(hkl) = (\bar{1}1\bar{3})$$

● (001)面と(003)面の違い

- ・(001)面: 互方向に1の周期を有する複数の面を表わす.
($n = \dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots$)
- ・(003)面: 互方向に $\frac{1}{3}$ の周期を有する複数の面を表わす.
($n = \dots -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \dots$)

7.2 ミラー指数の一括表示

- 立方晶系では座標軸の3軸が等価である→ 等価な方向および面が存在する

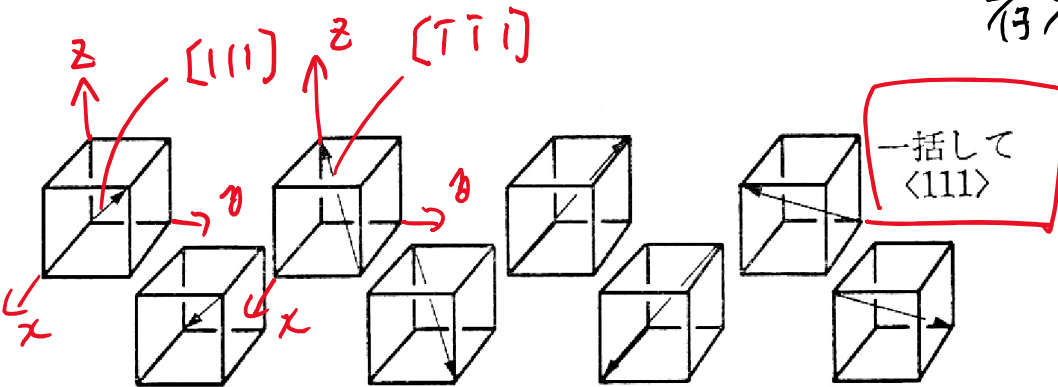


図 7.3 一括表示による方向の表し方

- ・単一方向: $[]$
- ・一括表示の方向: $\langle \rangle$

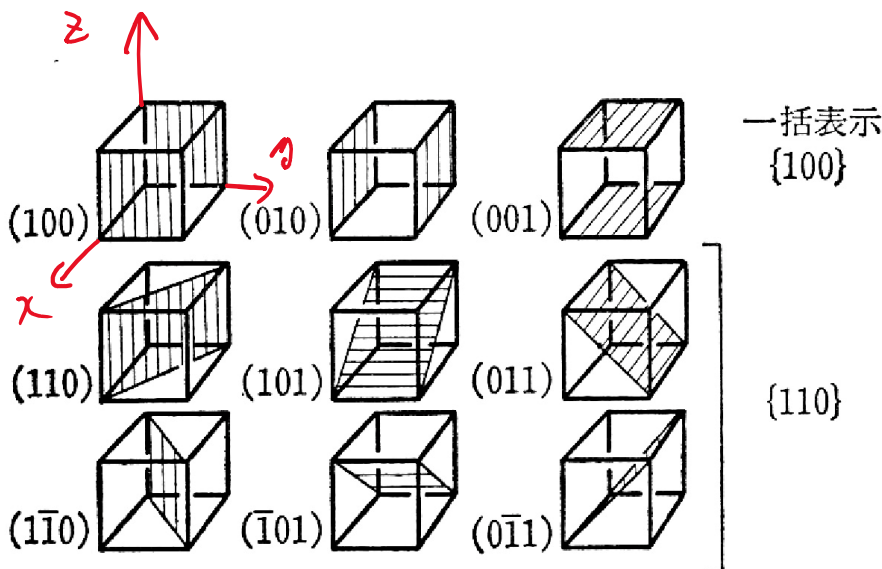


図 7.4 一括表示による面の表し方

- ・単一の面: $()$
- ・一括表示の面: $\{ \}$

7.3 分解せん断応力:

●転位の運動(=塑性変形)はせん断応力を駆動力として生じる。

問い:外力として垂直応力が負荷された場合、塑性変形は生じないのか?

→ A. 生じる。

- 垂直応力(荷重)の負荷方向に対して、結晶のすべり面およびすべり方向は任意の角を有するはず。
→ 垂直応力を、すべり面上のすべり方向におけるせん断応力に分解して考える。

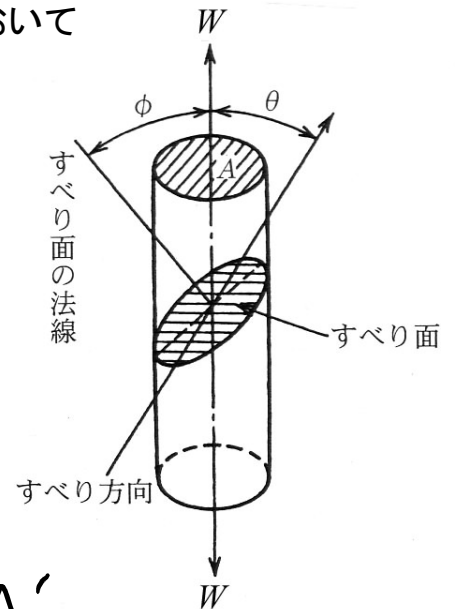
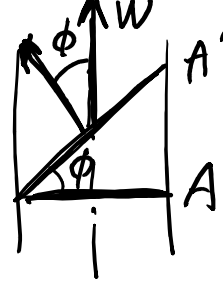
・引張荷重を受ける単結晶体(断面積:A)中のあるすべり系において

・すべり面法線方向と負荷方向の

なす角: ϕ

$$\cos \phi = \frac{A}{A'} \rightarrow A' = \frac{A}{\cos \phi}$$

すべり面の面積



・すべり方向と負荷方向とのなす角: θ

$$\cos \theta = \frac{W'}{W} \rightarrow W' = W \cos \theta$$

垂直荷重のすべり方向分力

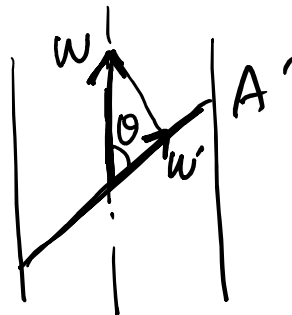


図 7.5 分解せん断応力
[新版 基礎機械材料学, 朝倉書店]

・従って、すべり面上のせん断応力 τ を A' と W' を用いて求めると

$$\tau = \frac{W'}{A'} = \frac{W \cos \theta}{A / \cos \phi} = \frac{W}{A} \cos \theta \cos \phi = \sigma \cos \theta \cos \phi$$

7.4 第7回講義に関する意見・感想・質問のまとめ

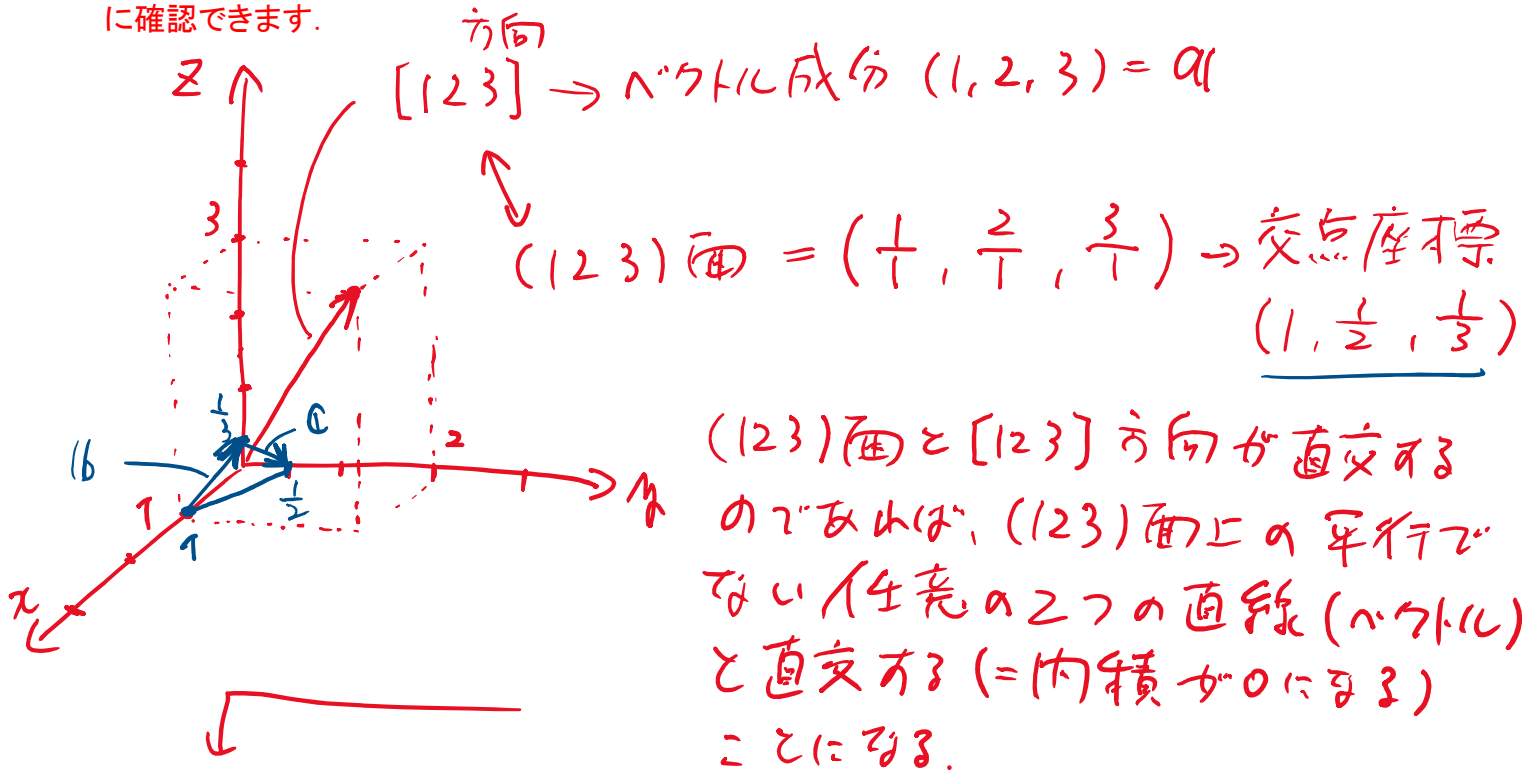
●意見・感想

- ・面の指数の読み方(面を軸まで拡大して考える)に合点が入った, ミラー指数の意味がわかった, ミラー指数という新しい考え方を学んだ, 表し方がわかりやすかった, 材料の分野でもベクトルが重要であることがわかった, 図から方向の成分を読み取るのが難しかった, 図形を拡大するという考え方が重要だと思った, 面と方向のどっちを求めているのかこんがらがると感じる, 解き方を覚えてパターン化すれば解ける, 指数の読み取りはできそうだが面や方向の作図は難しそう, ミラー指数がややこしかったが図解があつてわかりやすかった, カンマを書かないように気をつける, (003)面が周期的を意味するのが面白い, 去年あまり理解していなかったが今年はかなり理解した:26 ←ミラー指数について, 最初は戸惑うでしょうが回数を重ねれば慣れてくると思います
- ・ミラー指数の表し方を復習する, しっかり復習して満点を取りたい, 面と軸の交点を見つけるのに苦労しうるので重点的に復習する, ミラー指数について講義で理解しきれなかったので復習する, 慣れるまでたくさん練習する, ミラー指数にはルールがたくさんあるのでしっかり覚える, 分解せん断応力についてよくわからない部分があつたので復習する, ミラー指数を実際に使えるように身につける, 参考問題を解いて慣れておく, 一括表示について復習する, 内容を立体的に捉えられるように努力する, 参考問題がなくなるのでしっかり復習する:23
- ・小テストは容易に解けた, 計算ミスしてしまった, 単位がなんだかわからなくなってしまった, 有効数字がちゃんとできなかった, 電卓を忘れてしまい時間が足りなかった, 計算が非常に多く難しかった, 計算式を間違えた, 計算量は多かったが時間をかければ十分理解できた, 程よい難易度だった, 単位をつけ忘れた:13 ←今回の小テストは平均 5.9 点, 満点 11 名でした. ただ, 下記の通りカンニングした人がいたようです.
- ・進行速度はちょうど良かった:2
- ・分解せん断応力について理解できた
- ・期末までの折り返しなので早めに準備する
- ・Web の回答を読んでみたら面白かったので引き続き確認する ←ということは, 今までは読んでなかったんですか? !
- ・W 杯で寝不足が続いているが授業を頑張る ←私も正直, 少し頭がぼーっとしていました.
- ・小テストでカンニングをしている人がいた(半ズボンの太ももの上にスマホを置いていた) ←またですね... (IT の 3 年生向け科目でもありました). 多分, 参考問題は何年も問題を変えていないので既に過去の問的なものがあつて, それを見てたんでしょう. これを防止するために, 来年から①参考問題を毎年変える, ②参考問題の期間を短くする, ことにします. 一人の不心得者のためにみんなが(私も)迷惑することになりますが, やむを得ません.

●質問

- ・ミラー指数のアルファベットが筆記体なのは理由があるのか? ←正直, あまり意識していませんでした.
- ・忌引きで休んだ時の小テストはどうなるのか? ←小テストについては代替措置は考えていません.
- ・ミラー指数は 3 次元限定か? (数学では 4 次元以上が考えられることもあるが) ←「数学における 4 次元」という取り扱いは私はよく知りませんが, 材料内部の話なので通常の空間的次元(3 次元)までです.
- ・物性系の研究室が 2 つなくなるみたいだが新しい研究室は増えるのか, 配属人数が増えるのか? ←人事の話はなかなか漏れ伝わってきませんが, 状況から類推すると新しい教員がすぐに赴任することはなさそうです.

- ・面と方向で座標の逆数を用いるのはなぜか ← 「同一の指数を持つ面と方向は直交する」 (= 同一の指数を持つ面と方向において、方向は面の法線ベクトルとなる) という関係を保つためです。実際に以下のように確認できます。



そこで、上図で示す $(123) \text{面}$ の2辺を選んで内積を求めよう。

$$[\bar{3}01] = (-1, 0, \frac{1}{3}) \leftarrow b, \quad a \cdot b = 1 \times (-1) + 2 \times 0 + 3 \times \frac{1}{3} = 0$$

$$[0\bar{3}2] = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) \leftarrow c, \quad a \cdot c = 1 \times 0 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times (-\frac{1}{3}) = 0$$

いづれも内積は0である $\therefore (123) \text{面}$ と $[123]$ 方向は直交する。

7.5 第6回小テスト解答

完全焼なましした銅に対して圧延加工を行った結果、せん断変形応力が圧延前の 175.0 MPa から 350.0 MPa に上昇した。ここで銅のせん断弾性係数 $G = 45.0$ GPa, バーガースベクトル $b = 0.256$ nm, 材料定数 $\alpha = 0.50$ とする。

Q.1 ベイリー・ハーシュの関係から圧延加工前の転位密度 ρ_{before} と加工後の転位密度 ρ_{after} をそれぞれ求めよ。[各 3 点]

Q.2 この加工による転位密度の増加分 $\Delta\rho$ を求めよ。[4 点]

A.1 ベイリー・ハーシュの関係 $\tau = \alpha G b \sqrt{\rho}$ より, $\rho = \left(\frac{\tau}{\alpha G b} \right)^2$ にそれぞれの条件を代入する。

$$\tau_{\text{before}} = 175.0 \text{ MPa} = 175.0 \times 10^6 \text{ Pa}, \quad \tau_{\text{after}} = 350.0 \text{ MPa} = 350.0 \times 10^6 \text{ Pa},$$

$$\alpha = 0.50, \quad G = 45.0 \text{ GPa} = 45.0 \times 10^9 \text{ Pa}, \quad b = 0.256 \text{ nm} = 0.256 \times 10^{-9} \text{ m}$$

$$\rho_{\text{before}} = \left(\frac{175.0 \times 10^6}{0.50 \times 45.0 \times 10^9 \times 0.256 \times 10^{-9}} \right)^2 = 9.230 \dots \times 10^{14} \text{ m}^{-2}$$

(有効数字: 本来は 2 桁, 計算途中のため 2 桁目以降も残す)

$$\rho_{\text{after}} = \left(\frac{350.0 \times 10^6}{0.50 \times 45.0 \times 10^9 \times 0.256 \times 10^{-9}} \right)^2 = 3.692 \dots \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$$

(同上)

A.2 $\Delta\rho = \rho_{\text{after}} - \rho_{\text{before}} = 3.692 \dots \times 10^{15} - 0.9230 \dots \times 10^{15} \text{ m}^{-2} = 2.769 \dots \times 10^{15} = 2.8 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$

(有効数字: 引き算なので最小桁の位取りが高い方に合わせる→答えの最小桁が小数第 1 位になるよう処理する)

注: 「有効数字の扱いが不適切」「単位が付されていない」「値はあっているが桁が合っていない」というミスが多数あり。

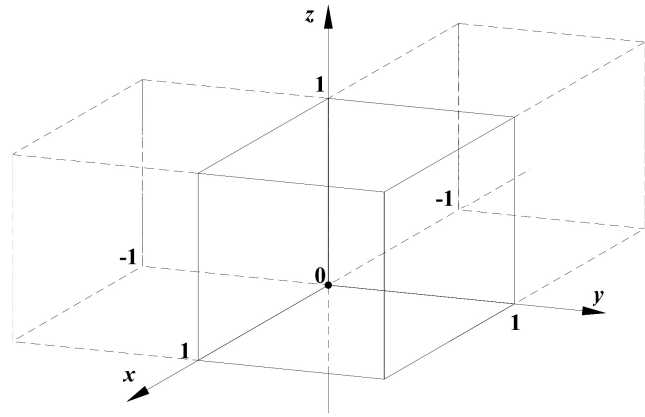
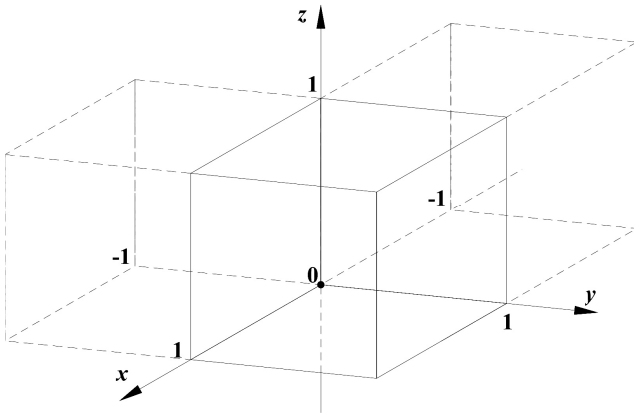
参考問題

Q.1 以下に示すミラー指数のすべり系(面および方向)を下図に図示せよ。

[各4点, 計8点]

(1) (110)面上の $[\bar{1}1\bar{1}]$ 方向

(1) (111)面上の $[10\bar{1}]$ 方向



Q.2 右図に示す面のミラー指数を求めよ。

[2点]

