

計測工学 第7回

前回：

- ・ 相関係数
- ・ 回帰分析



今回：

- ・ 時系列データとは
- ・ 自己相関関数

7.1 時系列データとは 時間 t の経過と共に変化する現象をデータ化したもの。

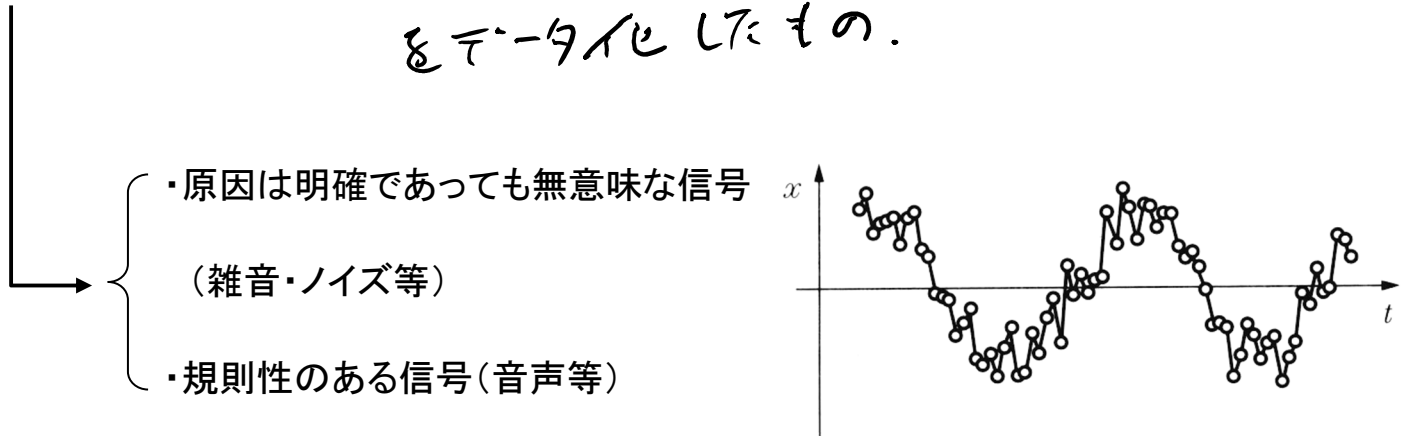
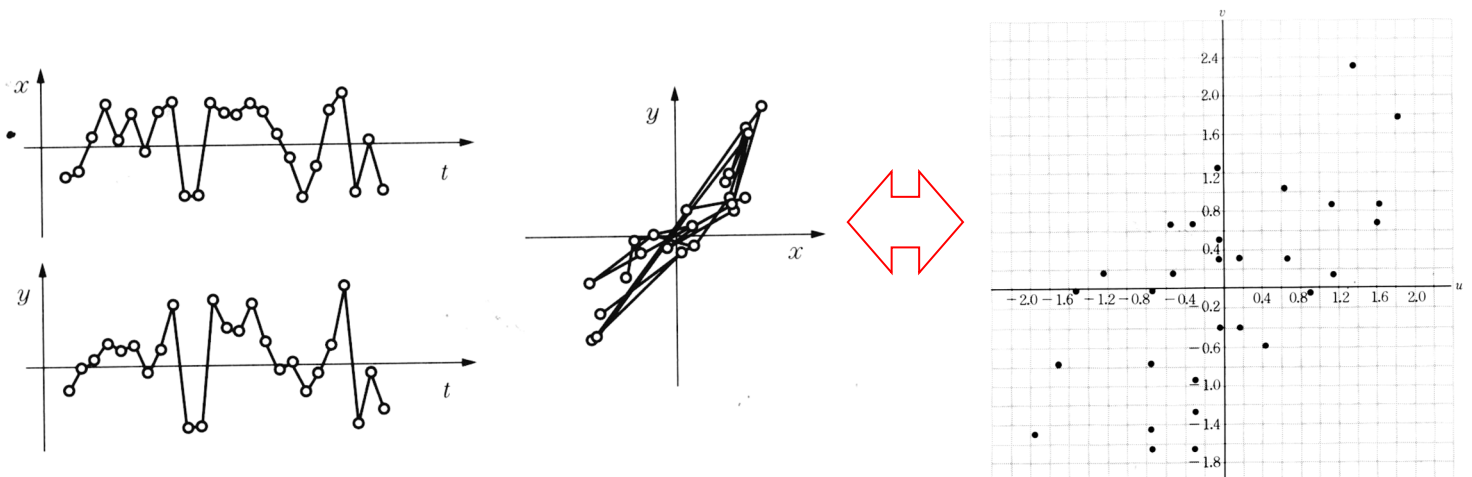


図 7.1 時系列データの例

問い: 時系列データから規則性(周期性)を見いだすには, どのような方法があるか?

- ・近似曲線を求める. (既知の関数)
- ・他相と対比して元の波形との一致を見る.
- 自己相関関数の考え方.

- $x = x(t)$, $y = y(t)$ の時系列データ (時間平均値が 0, $\bar{x} = \bar{y} = 0$), 時刻 $-\frac{T}{2} \sim \frac{T}{2}$ (周期 T) を考える.
- ① 時間パラメータ t を消去して $x-y$ 座標系に再プロットする ... 共分散 S_{xy} , 相関係数 r の考え方が適用できる.

図 7.2 $x(t)$ と $y(t)$ の相関がある場合

7.2 自己相関関数

・共分散 S_{xy} , 相関係数 r の定義式:

$$S_{xy} = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \quad r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$



$$C_{xy} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t)dt, \quad R = \frac{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t)dt}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt} \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y^2(t)dt}}$$

② T が十分に長い ($T \rightarrow \infty$.. 時間的母集団が十分に大きい) とき

$$C_{xy} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t)dt, \quad R = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t)dt}{\sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt} \cdot \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y^2(t)dt}}$$

「異なる時系列間で」

③ 「 x と y の比較」ではなく、1つの時系列 $x(t)$ における周期性の検証を行う場合

- もし $x(t)$ が周期性を持つ (周期 T) なら,
 $x(t)$ と $x(t+\tau)$ [$\tau = nT, n=1, 2, 3, \dots$] との間で等しい不変関数を示すはず.

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \boxed{x(t+\tau)} dt$$

自己相関関数

$$R(\tau) = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \boxed{x(t+\tau)} dt}{\sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt} \cdot \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \boxed{x^2(t+\tau)} dt}}$$

.. 係数

・例題: $x(t) = a \sin(\omega t)$ の場合の自己相関関数 $C(\tau)$ を求めよ.

$$x(t+\tau) = a \sin\{\omega(t+\tau)\} = a \sin(\omega t + \omega\tau)$$

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t + \omega\tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \omega t \cdot (\sin \omega t \cos \omega\tau + \cos \omega t \sin \omega\tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\underbrace{\sin^2 \omega t}_{\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)} \cos \omega\tau + \underbrace{\sin \omega t \cos \omega t}_{\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}} \sin \omega\tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\omega t}{2} \right) \cos \omega\tau + \frac{\sin 2\omega t}{2} \sin \omega\tau \right\} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{T} \left\{ \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \omega\tau + \left[-\frac{\cos 2\omega t}{4\omega} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \omega\tau \right\} \\ &= a^2 \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \left[\frac{T}{2} - \frac{\sin \omega T}{2\omega} \right] \cos \omega\tau + \frac{1}{T} [0] \sin \omega\tau \right\} \\ &= a^2 \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin \omega T}{2\omega T} \right) \cos \omega\tau = \underline{\underline{\frac{a^2}{2} \cos \omega\tau}} \end{aligned}$$

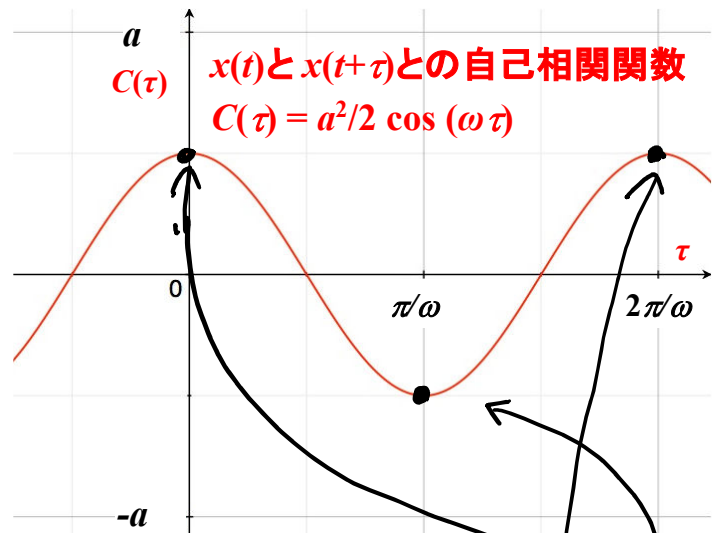
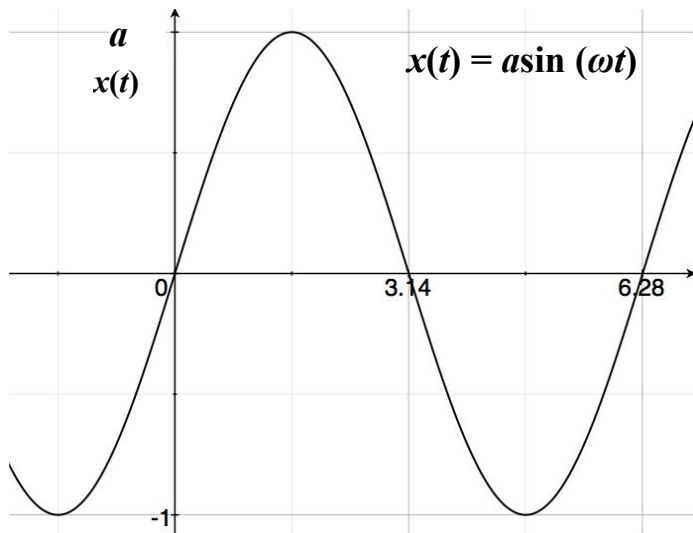


図 7.3 $x(t)$ と $C(\tau)$

- ・位相差 $\tau = 0, 2\pi/\omega$ のとき: $C(\tau)$ は最大
- ・ $\tau = \pi/\omega$ のとき: $C(\tau)$ は最小

●実際の測定ではノイズの無い正弦波を得られるようなことは無い

- ・ 時間に無関係な乱数で与えられるノイズ信号 $r(t)$ と元の正弦波信号 $s(t)$ に重ねる、とする。

$$x(t) = a \sin(\omega t) + r(t)$$

$$C(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \omega \tau + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} r(t)r(t+\tau)dt$$

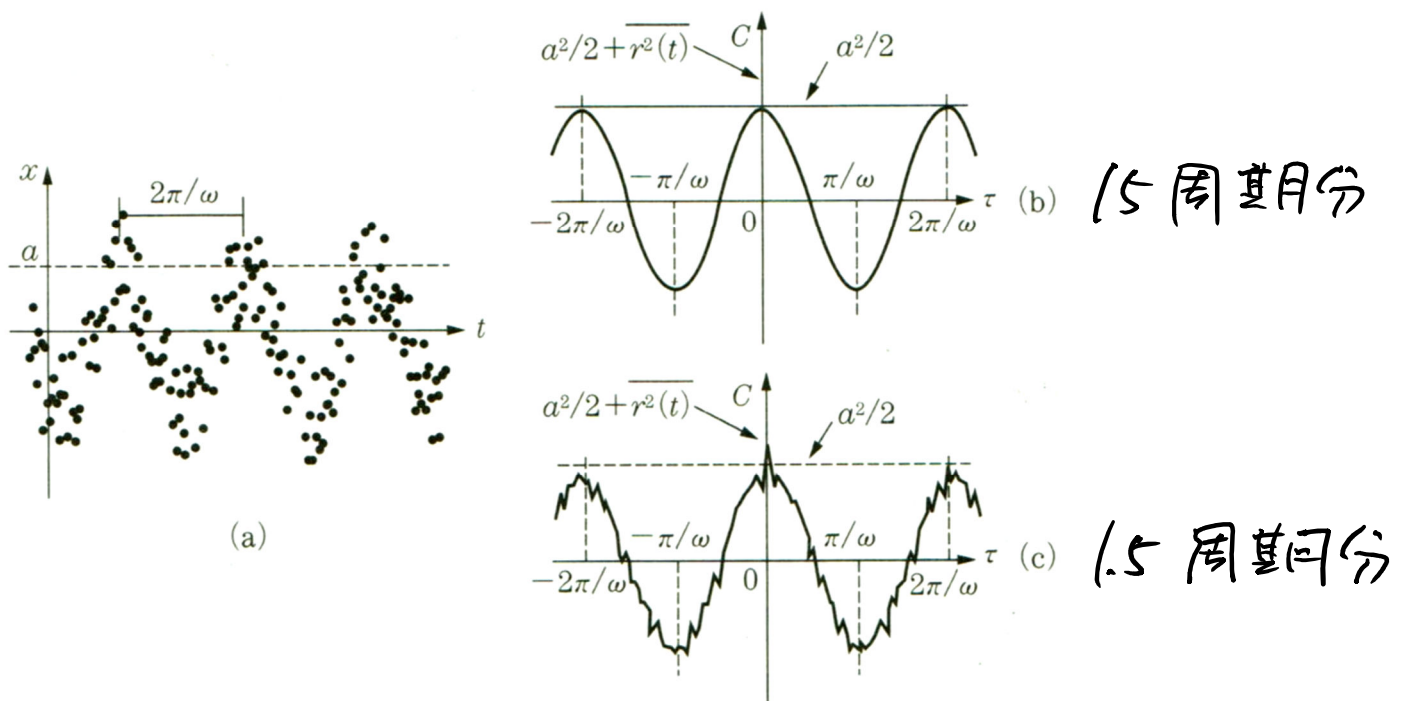


図 7.4 ノイズを含む時系列データの自己相関関数

- ・ 十分長い $x(t)$ データが利用可能であれば、 $x(t)$ の周期性に関する情報は保存される。

7.3 第7回講義に関する意見・感想・質問のまとめ

●意見・感想

- ・自己相関関数や自己相関係数について復習する, 中間テストの準備をしっかりと, 資料をしっかりと読み込んでテストに臨む, テストが近いのでしっかりと復習する, 有効数字や四捨五入を絶対間違えないようにする, t と τ を見間違えないよう気をつける, テストに出ないと言われたものの復習はしっかりと, 土日勉強する:27←**常々言っていますが, 私の科目の試験はしっかり準備すればするほど楽になりますので, 頑張って準備してください!**
- ・ノイズを含むデータに関する自己相関関数について理解した, 自己相関関数は計算が複雑だった, 自己相関関数の積分が大変だったので自己相関係数はもっと大変, 例題を正しく導いていたので非常に嬉しかった, 例題の答えを確認しておく, 積分は難しかったが自己相関関数の意義は理解できた, 最後の例題がキツすぎた, 最初は $C(\tau)$ が何かわからなかったが動画を見たら理解できた, 例題の $C(\tau)$ 導出について他のやり方の方が計算が簡単にできそう:16
- ・小テストうまくできなかった, 計算難しかった, 時間がギリギリだった, 相関の計算は問題なく行えた, 共分散の式を間違えた, 小テストがわかりやすかった, 時間が足りなかった:13←**今回の小テストは, 平均 8.7 点, 満点 30 名でした. 第2回小テストに次ぐ良い結果でした.**
- ・データの母数の重要性を改めて感じた, 標本数が多いほどノイズが減ることを知った:4
- ・電卓の機能で相関係数を一瞬で求められた, 電卓で相関係数を求められるらしいのでやり方を調べておく:2←**電卓については今までにも繰り返し伝えている通りです.**
- ・これまで曖昧だったところが前半の講義内容ですっきりできるところが多かった:2←**それはよかったです.**
- ・日本は負けてしまったので今後はスペインを応援する, 日本ブラジルに負けた:2←**残念でしたね...**
- ・ほぼ毎回発言ができたが1回だけできなかったのが悔しい←**積極的に発言してくれて, ありがとうございます!**
- ・あと1ヶ月で夏休みなので後悔しないよう勉強する←**いい心がけだと思います.**
- ・冷房が効きすぎて寒かった
- ・時系列データの知識がほとんどなかったのが新鮮だった

●質問

- ・自己相関関数について時間範囲が $-T/2 \sim T/2$ なのはなぜか?←**あまり意味はないと思います ($0 \sim T$ でも問題なし).**
- ・中間試験の際に提出するレポートはあるか?←**ないです. 課題提示してませんし.**
- ・自己相関関数が何を示しているのかがわからなかった←**授業で話した以上の説明はないですね...元の関数 $x(t)$ と, 位相 τ をずらした関数 $x(t+\tau)$ の間で, 位相をどれくらいずらしたら元の関数との一致度合いがどう変わるかを示しているのが $C(\tau)$ です.**

7.4 第6回小テスト解答

Q.1 2つの標本変数 x と y における共分散 S_{xy} , および x の標本分散 S_x^2 の定義式について, 空欄に記入して式を完成させよ. [4 点]

A.1

$$S_{xy} = \frac{1}{\boxed{n}} \sum_{i=1}^n \left(\boxed{x_i - \bar{x}} \right) \left(\boxed{y_i - \bar{y}} \right)$$

$$S_x^2 = \frac{1}{\boxed{n}} \sum_{i=1}^n \left(\boxed{x_i - \bar{x}} \right)^{\boxed{2}}$$

Q.2 3人の学生の体重 x と身長 y のデータ(下表)から相関係数を求めた上で, 体重と身長の間での相関について判断せよ. [6 点]

A.2 $n = 3$, $\bar{x} = 71$, $\bar{y} = 173$

$$S_{xy} = \{(2 \times 11) + (1 \times -1) + (-3 \times -10)\} / 3 = 17$$

$$S_x^2 = \{(2)^2 + (1)^2 + (-3)^2\} / 3 = 14/3$$

$$S_y^2 = \{(11)^2 + (-1)^2 + (-10)^2\} / 3 = 74$$

$$\therefore r = \frac{17}{\sqrt{\frac{14}{3}} \cdot \sqrt{74}} = 0.914... = 0.9$$

強い正の相関がある

	No. 1	No. 2	No. 3	
x	73	72	68	$\bar{x} =$
$x_i - \bar{x}$	+2	+1	-3	71
y	184	172	163	$\bar{y} =$
$y_i - \bar{y}$	+11	-1	-10	173