計測工学　第４回

前回：　・測定の不確かさ
　　　　・正規分布
　　　　・偏差値

今回：　・測定における平均
　　　　・標本分布
　　　　・母平均の区間推定

4.1 測定における平均

・母平均: 母集団の完全な平均値,「真の値」とみなす

例:全校生徒の身長の平均, クラス全員の試験平均 ⇒ 有限な標本なら求められる

・測定における母平均: 無限回の繰返し測定に基づき得られる

⇓

測定においては母平均は求められない.「未知数」

⇓

有限回の繰返し測定(=有限個の標本抽出)による「標本平均」で代用する.

標本平均 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ n:標本数 x_i:個々の標本

母平均 μ

母分散 σ^2 (母標準偏差 σ)

4.2 標本分布

●正規分布する母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ (例:偶然誤差を含む無限回の測定値)から n 個の標本（n 回の測定）を抽出し，標本平均 $\bar{x}$ を算出する.

問い: $\bar{x}$ の算出を複数回行った場合, どのような結果が得られるか？

正規分布母集団
（無限回測定値）
$N(\mu, \sigma^2)$

→ n個 → $\bar{x}_1$
→ .. → $\bar{x}_2$
⋮
→ .. → $\bar{x}_i$

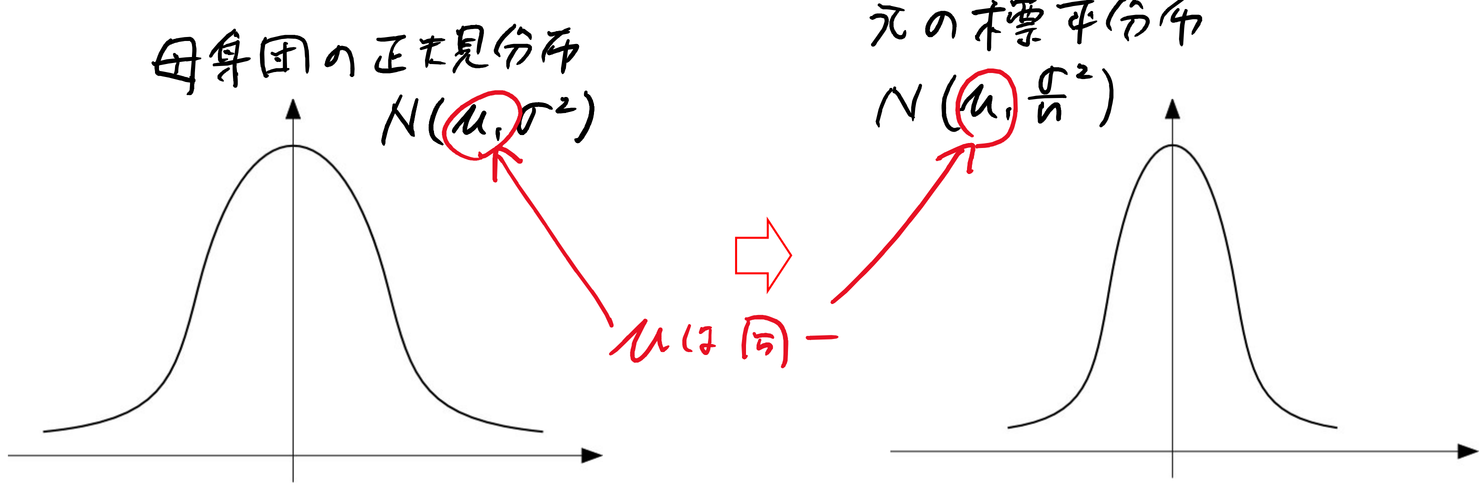
すべて同一にはならない
⇓
分布を持つ

nが大きくなるほど μ に近くなる.

●正規分布する母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から抽出した n 個の標本による標本平均 $\bar{x}$ ：

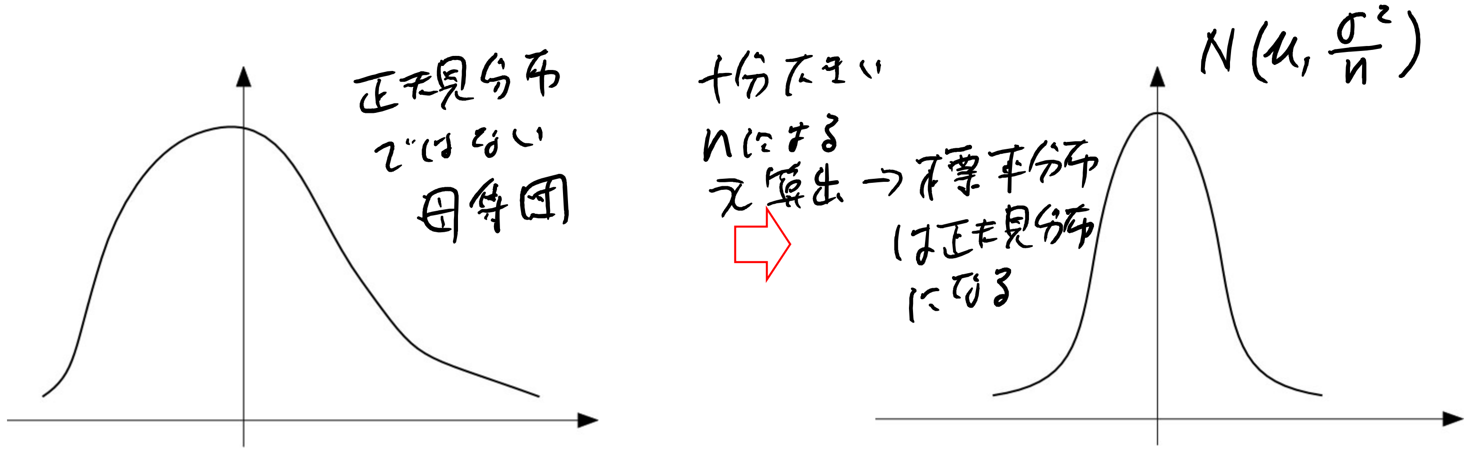
→ $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ という正規分布を示す $\bar{x}$ の標本分布

・標本分布 $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に基づき、母平均 μ を推定することが可能.



・nの大小に応じて、標本分布の分散は変化する.

・ちなみに・・・標本 n が大きければ，母集団が正規分布でなくとも $\bar{x}$ の標本分布は近似的に $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ の正規分布となる. →「中心極限定理」



4.3　標本分布の標準化

- 正規分布する標本分布 $N\left(\mu, \boxed{\frac{\sigma^2}{n}}\right)$ において、変数変換 $z = \frac{\bar{x}-\mu}{\boxed{\sigma/\sqrt{n}}}$ により標準化 $N(0, 1^2)$ することが可能.

$$\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

・例題：小学生の１ヶ月の小遣いが，μ＝2250 円・σ＝360 円の正規分布に従うとき，ランダム抽出した 36 名の小遣い平均 $\bar{x}$ が 2400 円を超える確率を求めよ.

$\bar{x}$ の標本分布 $N\left(2250, \frac{360^2}{36}\right)$ に対して変数変換を行う.

$$P(\bar{x} > 2400) = P\left(z > \frac{2400-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

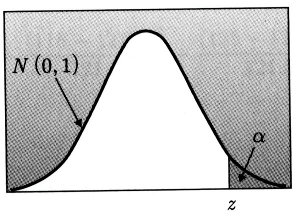
$$= P(z > 2.50)$$

下の正規分布表から，$z = 2.50$ のとき $\alpha = 0.0062$

$\underline{0.62\%}$

付表１　正規分布の上側確率 α

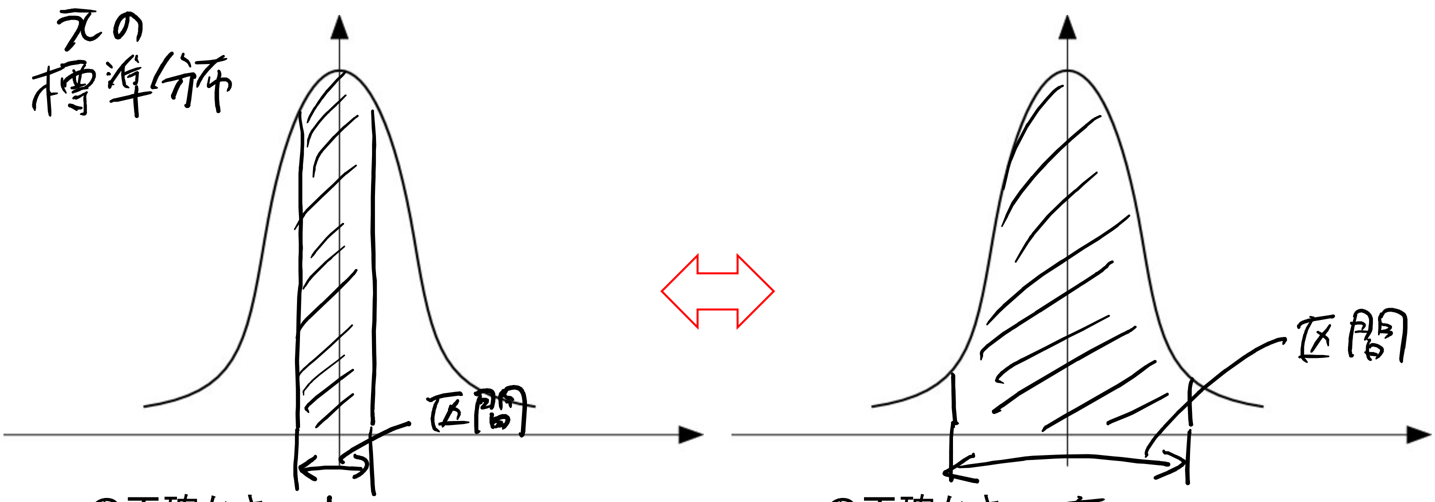
α ： $P(Z \geqq z) = \alpha$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0067	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

4.4　母平均の区間推定（母分散σ^2が既知の場合）

・母平均が含まれると推定する「区間」、およびその区間に含まれる「確率」を考慮して推定を行う。



・μの不確かさ：小

・区間に含まれる確率：低

・μの不確かさ：大

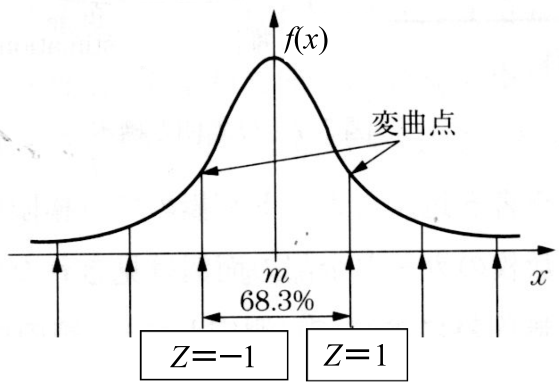
・区間に含まれる確率：高

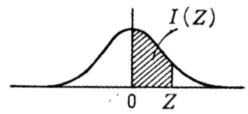
●区間推定方法

・変数変換$Z=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\boxed{\sigma/\sqrt{n}}}$により，区間をＺの値にて指定する．

← 標本分布の標準偏差、σではない

例：Ｚ＝1：　$I(Z)=0.3413=34.13\%$、両側なので ×2





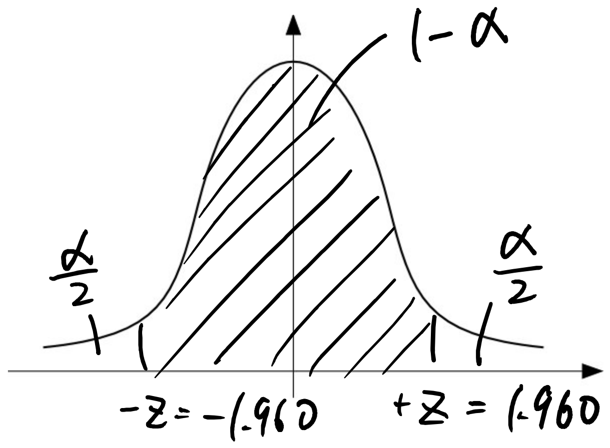
Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
+0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
+0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
+0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
+0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
+0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
+0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
+0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
+0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
+0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3079	0.3106	0.3133
+0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
+1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621

$\therefore P(-1 \leqq Z \leqq 1) = 2\times\{I(Z)\} = 0.6826 = 68.26\%$

・母平均μが $-1 \leqq Z \leqq 1$ の区間に含まれる確率

→ 信頼係数、「$1-\alpha$」と表わす。

（信頼度、信頼率）



・信頼係数 0.95 = 95% のとき，Z = 1.960

信頼係数から定まる区間

$\bar{x}$ の標本分布の標準偏差

$$1-\alpha = P\left(-Z \le \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le Z\right) = P\left(\bar{x} - Z\boxed{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le \mu \le \bar{x} + Z\boxed{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

信頼係数 1−α における，母平均の信頼区間

$2 \times Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: 信頼区間の幅

両側

・例題：ある金属塊の質量を 5 回測定し，以下の結果を得た．測定値は母分散 σ^2＝3.10 の正規分布であることが分かっているとき，信頼係数 95%（Z=1.960）で母平均 μ の信頼区間を求めよ．

$x_1 = 89.6$ g，$x_2 = 88.8$ g，$x_3 = 91.3$ g，$x_4 = 78.5$ g，$x_5 = 85.8$ g，

$\bar{x} = 86.\boxed{8}$ g，$n = 5$，$\sigma^2 = 3.10$，
$Z = 1.960$

$$\therefore Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = Z\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 1.960\sqrt{\frac{3.10}{5}}$$
$$= 1.\boxed{5}43\cdots \fallingdotseq 1.5$$

$\bar{x} - ○ \leqq \mu \leqq \bar{x} + ○$

$○ \leqq \mu \leqq \square$ [g]

$85.3 \leqq \mu \leqq 88.3$ g

4.4 第 4 回講義に関する意見・感想・質問のまとめ

●意見・感想

・また復習する，区間推定を復習する，小テストの予習に力を入れる，ちょっと怪しいので復習する，前回に続いて応用数理 E で習ったことなので応用数理 E の教科書を読み直す，最後の式が複雑だったので復習する，久々に標本分布を用いた計算をしたので復習する：15

・小テストで有効数字を考えずにやってしまった，昼休みにも復習しているので小テストがよく解けている，平均以下の範囲だったので混乱した，小テストの考え方がよく分からなかった，答えが現実的に考えると少なめだったので不安，最初から間違えた，変数変換できなかった，小テストが解けた，明らかに人数が多くなってしまったので間違えた，小テスト難しく感じた，時間が短く感じた：14←今回の小テストは，平均 7.4 点・満点 32 名でした．前回ほどではないにしてもなかなか良かったと思います．

・正規分布や信頼係数などの理解が深まった，信頼区間の計算方法を理解できた，統計的な計算に慣れてきた，このような計測でも活用できることとしれてよかった，例題を解くことで理解が深まった，曖昧だった部分を理解することができた，標本分布の標準化について理解した，少しこんがらがったが例題を解きながら理解できた，実際に統計がどのように使われているかを知ることができた：11

・電卓の機能をしっかり活用できるようにする，平均や分散は電卓で求める，電卓に平均や分散を求める機能があって驚いた：5←せっかく購入したものですから，なるべく有効活用できるようにするべきですね．

・第 3 回の記入済みファイルが見れなかった，前回授業で写しきれていないところがあったが HP にまだ載っていない：3←済みません，こちらの手落ちです．記入済み授業ファイルの準備（ミニッツペーパー内容の入力や質問への回答）およびアップロードは当日中に済ませていたのですが，研究室 HP の「講義ファイル」の html ファイルが正しくアップロードされていませんでした・・・今後そういう時はメールか何かで知らせてもらえればすぐに対応します（もちろんそのようなミスを無くすことが最優先ですが）．

・今日の正規分布表が上側確率だったので混乱した，分布のグラフを実際に書いて考えた方が理解しやすい，正規分布表の取り扱いにまだ慣れていない：3←今日の小テストでも，問題の条件（○○cm 以上□□cm 以下）が平均に対してどのような範囲を取るかを考えずに，機械的に解こうとしている人が何人かいました．ちゃんと正規分布の模式図を書けばすぐ分かるはずなんですけどね．

・そろそろ半分なので 1 回目から復習する：2

・色々覚えることが増えてきて大変

・標本分布の変数変換から上側確率を 1 発で求められることがわかった←これは誤解です，「どの種類の正規分布表を用いたか」が大事なんです！

・MICHELIN の T シャツが渋い←ありがとうございます！

●質問

・小テストだけ出してミニッツペーパーを出さない場合は出席にはならずに小テストの点数のみ反映されるのか？←いえ，その場合は「小テストの点数は反映」＋「出席 0.5 回分」となります．

・小テストの時の Z の小数第 3 位の値の扱いについて迷った←今回の場合は I(Z)を正規分布表から求める必要があり，正規分布表は小数第 2 位までなので，まずは変数変換で求めた値を小数第 2 位に丸める必要があります．

・分散が σ^2/n になるイメージが湧かないが覚えるしかないのか？←授業でも話したように，標本分布は元の母集団の正規分布より必ず分散が小さくなるはずなので（P.2 の上の図）n で割る，というふうに覚えてください．

4.5 第 3 回小テスト解答

Q.1　ある高校男子生徒 150 人の身長が平均 μ＝170.4cm，標準偏差 σ＝5.7cm の正規分布のとき，169.5cm 以上 173.0cm 以下の生徒はおよそ何人いるか求めよ．

A.1　$Z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$より･･･　（169.5 – 170.4）/ 5.7 = - 0.157…≒ - 0.16

（173.0 – 170.4）/ 5.7 = 0.456…≒ 0.46

∴ $P(169.5 \leq x \leq 173.0) = P(-0.16 \leq Z \leq 0.46)$

正規分布では正負で同じ確率を取るため，

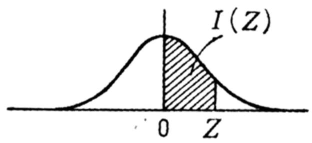
$P(-0.16 \leq Z \leq 0.46)$　$= P(0 \leq Z \leq 0.16) + P(0 \leq Z \leq 0.46)$　･･･　正規分布表より

$=0.0636 + 0.1772$

$=0.2408$

従って範囲内の人数は　　$150 \times 0.2408 = 36.12$

∴　およそ 36 人（切り上げて「37 人」とした解答も○にした）



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
+0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239
+0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636
+0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026
+0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406
+0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772
+0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123
+0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454
+0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764
+0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051
+0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315
+1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554
+1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770
+1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962
+1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131
+1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279
+1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406
+1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515
+1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608
+1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686
+1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750
+2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803