計測工学　第３回

前回：　　・有効数字
　　　　　・数値の丸め方
　　　　　・誤差伝搬の法則

今回：　　・測定の不確かさ
　　　　　・正規分布
　　　　　・偏差値

3.1 測定の不確かさ(誤差)

・不確かさ(誤差)＝ 個々の測定値 − 真の値　知ることはできない

・問い：誤差を小さくするための具体的方法は？

・測定回数を増やす
・複数人で交代して行う.
・器具の質を上げる.
・外れ値を棄却する.
環境条件を整える.

●誤差の分類

①系統誤差：測定器固有の誤差(器差)，測定者の癖(個人誤差)，環境条件，等による

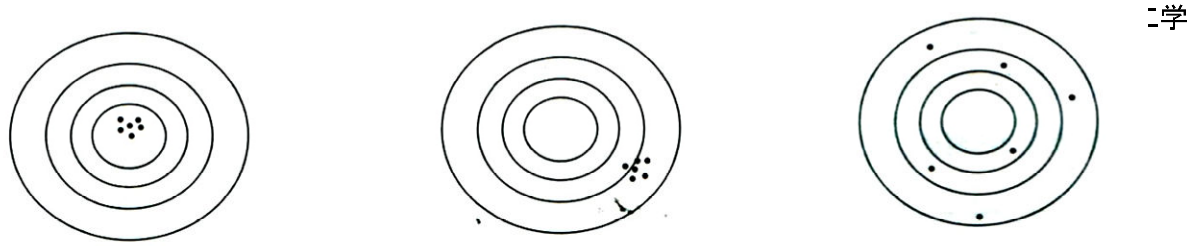
・「かたより」を生じる
・原因を追求して低減・補正が可能

②偶然誤差：原因を特定不可能な揺らぎや不確実性に由来する

・「ばらつき」を生じる.
・低減・補正は不可能 → 統計的扱いが必要

③過失誤差：機器操作の誤り，等

・「ばらつき」の一因
・測定者や器具に依存 -- 対策は可能



(a) かたより・ばらつきとも小　(b) かたより大・ばらつき小　(c) かたより小・ばらつき大

図 3.1 かたよりとばらつき（イメージ）

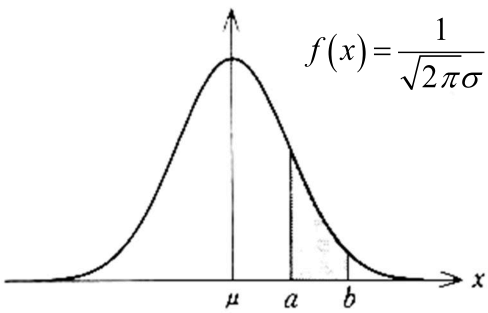
●ばらつき（偶然誤差）の特徴

・平均値付近の値が測定される頻度：　高い

・　〃　より離れた値が　〃　：　低い

・平均値を中央としたときの左右のばらつき：　同程度

} 正規分布



$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

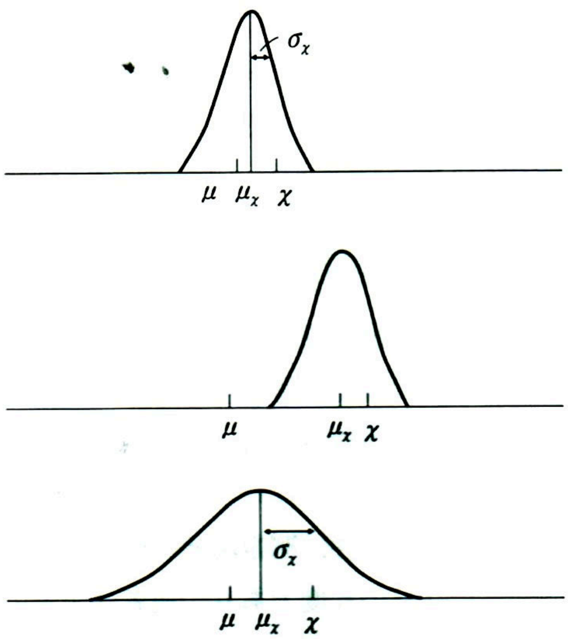
X：確率変数

x：測定値のとり得る値

$f(x)$：確率密度関数

図 3.2 正規分布

$a \leqq X \leqq b$ となる確率：$P(a \leqq X \leqq b)=\int_a^b f(x)dx$



	ばらつき 精度	かたより 真度
(a)	○	○
(b)	○	×
(c)	×	○

μ：平均値

σ^2：分散

σ：標準偏差

正規分布の表記：

$N(\mu, \sigma^2)$

図 3.3 かたよりとばらつき（正規分布）

3.2 正規分布の標準化

● (a) 成年男子の身長の分布，N(170 cm, (6 cm)^2)

(b) 小学 3 年男子の身長の分布，

N(128 cm, (4 cm)^2)　を比較する．

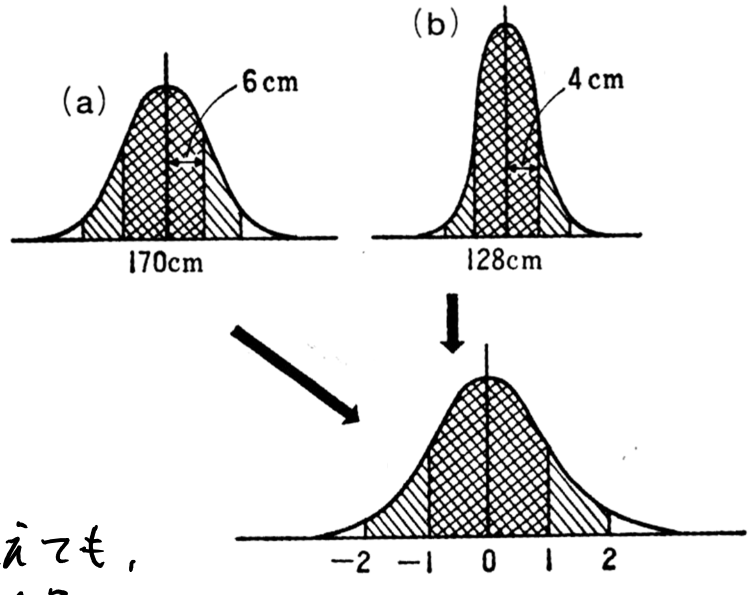


図 3.4 正規分布の標準化

・正規分布の性質より・・・

分布の形状が異なって見えても，

同一の標準偏差内に含まれる

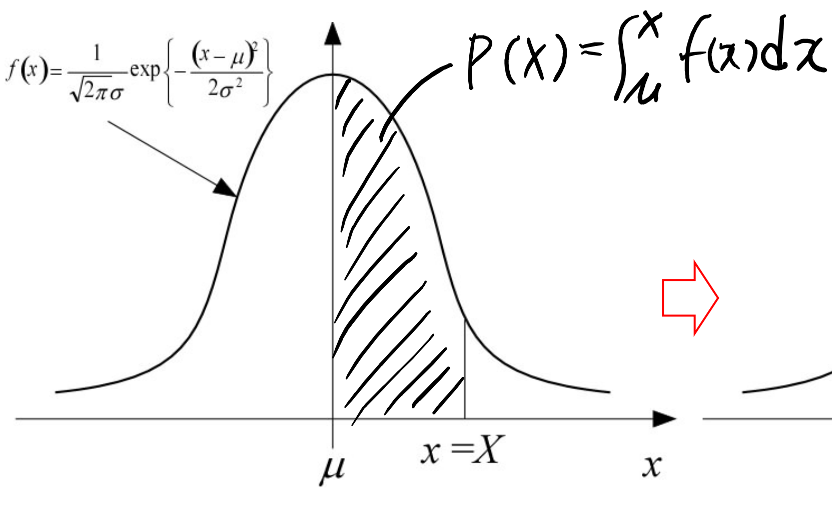
$\sigma, 2\sigma$ 確率は等しい．

●個別の正規分布に対して・・・ 変数変換 $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ を行う

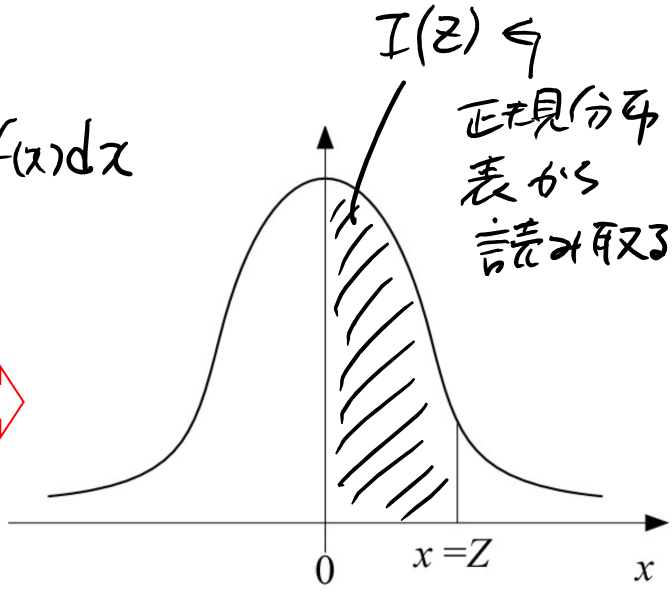
ことにより，$N(\mu, \sigma^2) \to N(0, 1^2)$ として標準化する．

. 全ての正規分布を平均0，標準偏差1として扱える．

. 正規分布表を用いて任意の範囲に含まれる確率を求められる．（積分不要）



(a) 個別の正規分布



(b) 標準化正規分布

図 3.4 正規分布における確率推定

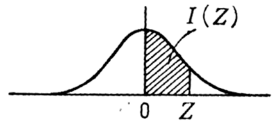
・正規分布表の使用法

①: その正規分布表が記述している確率（$I(Z)$の領域）を確認する.

②: 測定値 x に対して変数変換を行い，x に対応する Z の値を求める.

②: Z の値を縦軸および横軸から選択し，両軸から該当する表中の値が確率 $I(Z)$の値（＝$I(Z)$の面積）となる.

表 3.1 正規分布表



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
+0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
+0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
+0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
+0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
+0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
+0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
+0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
+0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
+0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3079	0.3106	0.3133
+0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
+1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
+1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
+1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
+1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
+1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
+1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
+1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
+1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
+1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
+1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
+2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
+2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
+2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
+2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
+2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
+2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
+2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
+2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
+2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
+2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
+3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

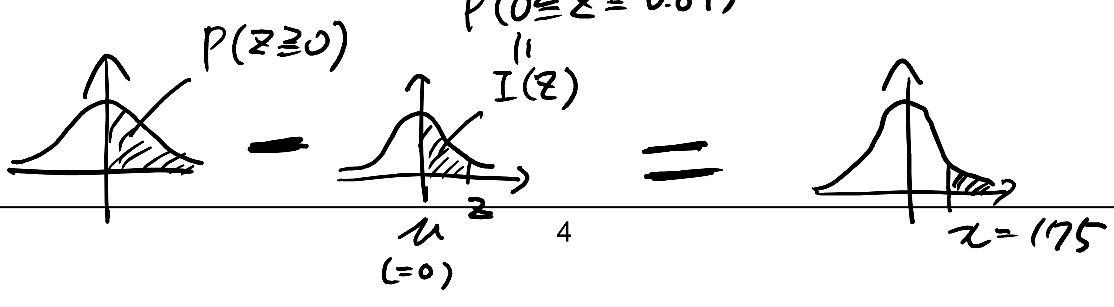
・例題: ある高校 3 年男子 150 人の身長が平均 μ = 170.4cm，標準偏差 σ = 5.7cm の正規分布を取るとき，175cm（.0）以上の生徒数を求めよ.

$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{175.0-170.4}{5.7}=0.81$$

$$\begin{aligned}P(x \geqq 175.0) &= P(Z \geqq 0.81)\\ &= P(Z \geqq 0) - P(0 \leqq Z \leqq 0.81)\\ &= 0.5 - 0.2910\\ &= 0.2090\end{aligned}$$

→ 0.2090×150
$= 31.35$
$= 32$人

（人数なので切り上げ）



3.3 標準化正規分布における標準偏差

・標準化した正規分布 $N(0,\ 1^2)$において，分布の形状は全て同一である

● 標準偏差$\sigma=1$を基準とした範囲の表記と、それに対応する確率は図3.5のように表わされる。

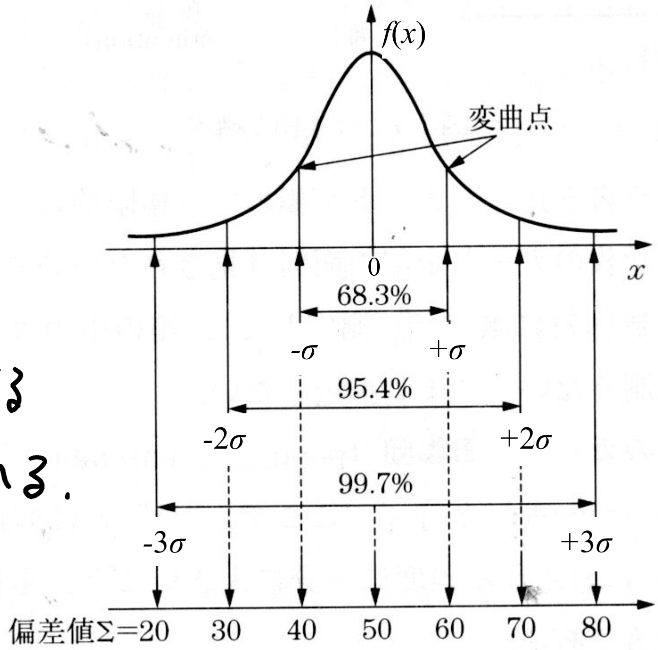


図 3.5 標準化後の標準偏差

・例題：標準化された正規分布において，$\pm3\sigma$（-3σ ～ $+3\sigma$ の範囲内）に含まれる確率は何%となるか，表 3.1 の正規分布表を用いて求めよ.

$z=3.00$における $I(z)=0.49865$

↓

$\pm3\sigma$であれば $0.49865\times2\times100$ [%]

$=99.73$ %

3.4 第 3 回講義に関する意見・感想・質問のまとめ

●意見・感想

・変数変換の使い方がわかった，正規分布はグラフをしっかり考えて解くことが重要，正規分布表の利点がわかった，他の講義で習ったことが多くて興味深かった，応用数理の正規分布表とは違っていて何に対応しているのか確認する必要性があるとわかった，標準偏差に対する認識が不確かだったことを実感した，復習的な内容だったのでよく理解できた，正規分布表についてこの授業で少し整理できた，前にやった講義の内容が繋がってる感じがしてちゃんと勉強しといてよかったと思った，真面目に受けてると勉強も面白く感じてとてもよい，測定の不確かさについて詳しく知ることができた：27←本科目の内容は特に「科目横断」的観点を持った方が，理解が深化しやすいのでしょうね．

・正規分布を利用した計算についてよく復習する，少しわからないところがあったので復習する，もっと復習しないといけない，他の実験等に活かせることが多いのでしっかり勉強する，統計の計算について忘れている部分も多くあったので復習する，例題がよく解けなかったので復習する，有効数字で毎回悩むのでそろそろ完璧にしたい，統計があまり得意でないので復習をしっかりする：20

・小テストに力を入れて点数をいっぱい取る，電卓を忘れてて計算になった，小テストを通して誤差について確認できた，小テストの問題をスムーズに解き切ることができたのでよかった，昨日の今日で大変だったが小テストいけたと思う，小テストの桁数が難しかった，式が穴埋めだったので易しかった，次の小テストで良い点数を取れるように頑張る：12←今回の小テストは平均 9.1 点，満点 35 名でした．非常にいい結果で，短時間でしたが皆さんがしっかり準備した成果かと思います．

・久々に夏を感じる天候だった，暑くなってきて大変：2←もう T シャツで十分ですよね．

・前回の例題の計算（焼入れ試験片の絞り算出）の理由がわかった←良かったです．

・正規分布の例題が難しいと感じた←よく復習しておいてください．

・前回の記入済みファイルのアップロードが早くて驚いた←こっちの都合で補講にさせてもらったので，なるべく復習時間を長く取れるように頑張りました．

・講義によるインプットだけでなくレポート等での知識のアウトプットを両立させる←そうできれば理想ですね！

●質問

・最後の例題は有効数字を考慮すると 99.730%では？←厳密にはその通りです．

・統計処理においては有効数字は厳密に見なくてよいのか？←正直，厳密に扱うことが難しい状況も出てくると思います（桁が 1-2 桁しか当たられていない時も多々あります）．

・人数を扱うときに四捨五入ではなく切り上げた理由がわからなかった，0.35 分は 1 人としてカウントされないのでは？←確認しました（ネット調べ）が，人数を求める場合（小数から整数への処理）は設問の条件によって判断するのが適切だそうです．この例題の場合は，「175cm 以上」の条件にもとづき求めた結果が「31.35 人」，つまり 32 人としてしまうと正規分布の「x=175」より左の斜線部面積を超えてしまうことになるため，「31 人」とするのが正しいようです．

・正規分布の確率密度関数の√の部分は$\sqrt{2\pi}\cdot\sigma$なのか$\sqrt{2\pi\sigma}$なのか？←この資料に記載されている通り「$\sqrt{2\pi}\cdot\sigma$」です．

3.5 第 2 回小テスト解答

Q.1 誤差伝播の法則に基づき，以下に示す誤差Δq の式を完成させよ．[6 点]

$$\Delta q = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\boxed{(1)}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\Delta x_2\right)^{\boxed{(2)}} + \cdots + \left(\boxed{(3)}\cdot\Delta x_n\right)^2}$$

A1. (1) Δx_1 (2) 2 (3) $\frac{\partial f}{\partial x_n}$

Q.2 長方形の土地の面積を求めるため縦と横の長さを測定した結果，縦 15.32±0.02 m，横 5.81±0.01 m となった．誤差伝播の法則に基づき，誤差も含めた土地の面積を求めよ．［4 点］

A.2 Q.1 で導出した誤差Δq は次式で表される．

$$\Delta q = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^2}$$

また関数の形式 $q = x_1 \cdot x_2$，$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 = 5.81$，$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 = 15.32$，$\Delta x_1 = 0.02$，$\Delta x_2 = 0.01$ より

$q = 15.32 \times \underline{5.81} = 89.0092 = 89.0$ m ←有効数字 3 桁，この場合は掛け算なので<u>桁数</u>の小さい方（5.81，3 桁）に合わせる

$\Delta q = \pm\sqrt{(5.81\times 0.02)^2 + (15.32\times 0.01)^2} = \pm 0.1922\ldots = \pm 0.2$ m ←誤差を表す値は 1 桁，この場合は q の最小桁（小数第 1 位）に合わせて 1 桁

<u>$q \pm \Delta q = 89.0 \pm 0.2$ m^2</u>