計測工学　第 2 回

前回：
- 授業ガイダンス
- SI について
- 工学単位系

今回：
- 有効数字の復習（続き）
- 数値の丸め方
- 誤差伝搬の法則

2.1 有効数字

・例題：元の直径 d_0=10.00mm の S50C 丸棒 2 本にそれぞれ焼入れおよび焼鈍しを施した上で引張試験を行ったところ，試験後の d_1 は 9.97mm（焼入れ）および 8.63mm（焼鈍し）だった．機械的特性値のひとつである「絞り」の定義式 $\phi = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \times 100 = \left(1 - \frac{A_1}{A_0}\right) \times 100[\%]$ に基づき，それぞれの絞りを求めよ．

$$A_0 = \frac{\pi 10.00^2}{4},\quad A_{入れ} = \frac{\pi 9.97^2}{4},\quad A_{なまし} = \frac{\pi 8.63^2}{4}$$

$$\phi_{なまし} = \frac{\frac{\cancel{\pi}10.00^2}{\cancel{4}} - \frac{\cancel{\pi}8.63^2}{\cancel{4}}}{\frac{\cancel{\pi}10.00^2}{\cancel{4}}} \times 100 = \frac{10.00^2 - 8.63^2}{10.00^2} \times 100$$

$$= \frac{100.0 - 74.4769}{\cancel{100}.0} \times \cancel{100} = 25.5231 = \underline{25.5\%}$$

$$\phi_{入れ} = 0.599\%$$

$$\frac{10.00^2 - 9.97^2}{10.00^2} \times 100 = \frac{100.0 - 99.4009}{\cancel{100}.0} \times \cancel{100}$$

$$= 0.6\%$$

2.2 数値の丸め方

●これまで：原則として四捨五入 → 厳密に言うと、処理後の数値は高めにシフトする恐れがある。

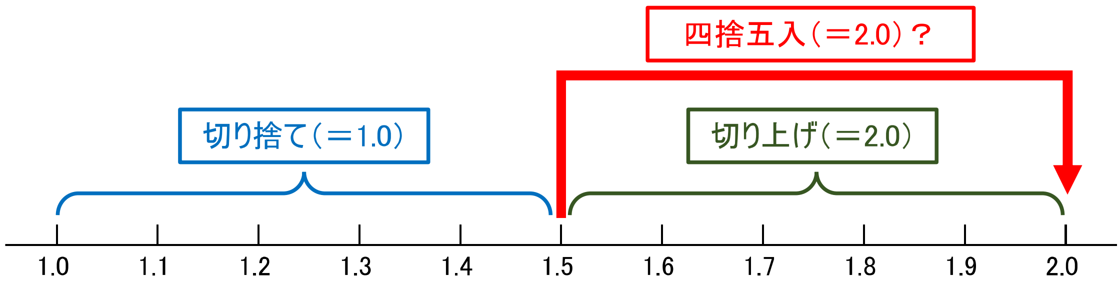


図 2.1 四捨五入の考え方

●JIS Z8401 で規定された丸め方：

例：ある測定値を 1 の位に丸める場合

○ . ○ ○

①この数字が 4 以下：切り捨て

例：1.45 → 1.~~00~~

② この数字が 6 以上 / この数字が 5 ＆ 1 桁下が 0 以外の数字 } 切り上げ

例：1.65 → 2.~~00~~

1.51 → 2.~~00~~

③この数字が 5 ＆ 1 桁下が 0 か無し

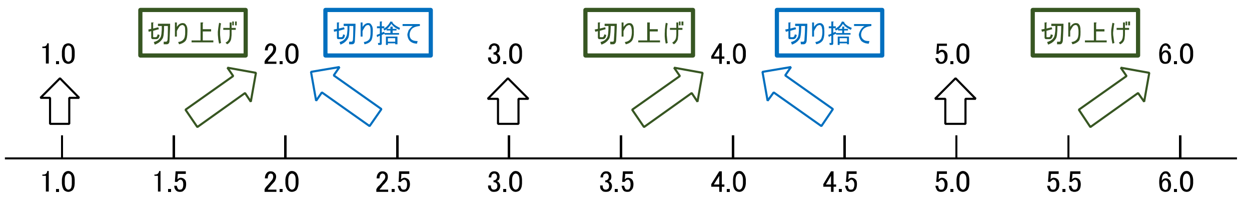
1 桁上が 0, 2, 4, 6, 8： 切り捨て

〃 1, 3, 5, 7, 9： 切り上げ

丸めた数値が常に偶数になる →

例、2.50 → 2.~~00~~

1.50 → 2.~~00~~



例題：次の数値を小数第 1 位で丸めよ．

(1) 12.223 (2) 12.250 (3) 12.550

12.2 12.2 12.6

2.2　誤差伝播の法則

・直接測定：測定量と同種類の基準量と比較して測定する事.（例：長さ、質量　）

⇨ 測定結果と誤差が直接関連づけられる.

・間接測定：測定値を，関連する複数の直接測定値から計算により求める事.

（例：密度 = 質量/長さ^3　）

⇨ 間接測定の誤差は、個々の直接測定における誤差の影響により決まる.

$$q = f(x_1, x_2, x_3 \cdots x_n)$$

⇩

・誤差伝播の法則：間接測定値 q が個々の独立した直接測定値 x_1, x_2, x_3, ･･･, x_n より求められるものとし，x_1, x_2, x_3, ･･･, x_n がそれぞれ Δx_1, Δx_2, Δx_3, ･･･, Δx_n, の誤差を持つとき，間接測定値 q の誤差 Δq は次式で表される.

$$\Delta q = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^2}$$

● **ある長方形の土地の面積を求めるため，縦と横の長さを異なる方法で測ったところ，以下の測定結果を得た.**

・縦：15m，誤差 1m 単位　→　$15 \pm 1m$　　$x_1 = 15m$, $\Delta x_1 = 1m$

・横：5.8m，誤差 0.1m 単位　→　5.8 ± 0.1　　$x_2 = 5.8m$, $\Delta x_2 = 0.1m$

面積 $q = f(x_1, x_2) = x_1 \times x_2$　　$\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 = 5.8$　，　$\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 = 15$

$$\therefore\ \Delta q = \pm\sqrt{(5.8\times 1)^2 + (15\times 0.1)^2} = \pm 5.9908 \cdots = \pm 6$$

1の位

注：不確かさを表す数字は 1 桁のみであり，
それは間接測定値の計算結果における
最小値である.

$\Delta q = \pm 6\ m^2$

$q = 15 \times 5.8 = 87\ m^2$

不確かさ：1の位

$\therefore\ q \pm \Delta q = 87 \pm 6\ m^2$

・例題：異なる試薬 I および II を混合する際，試薬 I が 21±2g，試薬 II が 14±3g であった.

誤差伝播の法則に基づき，合計の質量を誤差も含めて表せ.

$q = x_1 + x_2,\ x_1 = 21g,\ \Delta x_1 = 2g,\ x_2 = 14g,\ \Delta x_2 = 3g$

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1,\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 1,\ q = 21 + 14 = 35g$

$\Delta q = \pm\sqrt{(1\times2)^2 + (1\times3)^2} = 3.605\cdots g = 4g$

$\therefore\ q \pm \Delta q = 35 \pm 4g$

・例題：ある円筒形物体の寸法を測定したところ，高さ 6.54±0.02 cm，直径 1.43±0.01cm

であった．誤差伝播の考え方に基づき，誤差を考慮したこの物体の体積 V [cm³]を求めよ.

$q = \frac{\pi d^2}{4}\cdot h = \frac{\pi x_2^2}{4}\cdot x_1,\quad x_1 = h = 6.54\,cm,\ \Delta x_1 = 0.02\,cm,\quad x_2 = d = 1.43\,cm,\ \Delta x_2 = 0.01\,cm$

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\pi x_2^2}{4} = 1.6060\cdots \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\pi x_1}{4}\cdot 2x_2 = \frac{\pi x_1 x_2}{2} = 14.6904\cdots$

$q = \frac{\pi 1.43^2}{4}\cdot 6.54 = 10.5\cancel{0}36\cdots = 10.5\,cm^3$

$$\Delta q = \pm\sqrt{\left(\frac{\pi \, 1.43^2}{4} \times 0.02\right)^2 + \left(\frac{\pi x_1 x_2}{2} \times 0.01\right)^2}$$

$$= 0.\overset{2}{1}\cancel{5}037\cdots$$

$$= 0.2 \text{ cm}^3$$

$$\therefore \ 10.5 \pm 0.2 \text{ cm}^3$$

2.3 第 2 回講義に関する意見・感想・質問のまとめ

●意見・感想

・誤差伝播については実験時に学んだが再び学習できて助かる，去年の実験で強く取り扱った内容だった，事件で使うと思うのでしっかり覚える，誤差の計算でも丸めを意識しなければいけないので大変，誤差を考えるのが苦手だったが今回の講義で理解できた，誤差の式は見た目は難しそうだけど意外とわかりやすかった，誤差の程度や位がわかるように表せばおのずと正しい有効数字で表せることを知った：18←誤差伝播の式は意外と覚えやすいと思います．

・有効数字の丸め方についてこれまでと違いやり方を学べた，誤差の丸めは材料分析科学でやったが理解が浅かった，加減算が混ざっている時は注意する，数値の丸めについて数直線を使った説明で頭にすんなり入った，四則演算を同時に扱う場合の有効数字が難しい，数値の丸めが難しい，丸めるというのはただ単に四捨五入するものではないことがわかった：10←数値の丸めも，理屈が分かればそんなに難しくはないですよね．

・よく復習する，Δq の式を忘れそうなので自分でいくつか問題を解いてみる，もう少し復習しないといけない，過去の学習も今一度学習する，小テストの問題が曖昧だったので復習する，誤差の伝搬の問題が難しかったのでしっかり復習する：7

・小テスト頑張りたい，最終的にどの形に持っていけばいいのかわからなくなってしまった，小テストの前に少しでもいいから勉強する，最後にパニクって答えを変えてしまい間違えた，重力加速度で割るところをかけてしまった：5←今回の小テストは平均 6.3 点，満点 16 名でした．根本的に間違ってる人（圧力の単位換算なのに解答の単位を「kgf」と書いてる，重力加速度をかけちゃってる，等）が一定数いて残念でした．

・補講出席できない予定だったがバイト代わってもらえて出席できた，補講に忘れずこれただけでめっちゃ偉い：2←休講・補講はこちらの都合なので，なるべく少なくするよう努力してます．

・遅刻をして人間違いされたが遅刻した自分が悪いので今後は気をつける←本当に済みません．人間違え以前に，自分の未熟さを反省しました．

・講義室の冷房の効きが良くて快適だった←私が部屋に来た時は温度設定が 18℃だったのであわてて 24℃まで上げましたが，まだ少し低かった気がします．

・例題が重かった←流石に次回の小テストは時間を延長するでしょう．

・今回は有効数字の小テストだと思っていたので単位換算の復習をしていなかった←「重要な点」を毎回最後に説明してますが？

・明日も授業があるけど頑張りたい←何か特別な日でしたっけ？日本代表の試合はまだ先ですよね？

・h がわからなくてものすごく焦った←最後の例題の話ですかね？

●質問

・一の位で四捨五入するとき「5.」のように小数点も書く表記にした方が良いか？←「小数点の明示」は，1 の位が意味のある 0 であることを示すために使いますので，0 以外の数字の時は不要です．

・試薬混合の例題で 2 つの値の合計は「35±5g」になるが誤差伝播の法則によれば「35±4g」になるのはなぜか？←確かに！私も初めて気づきました，単なるイメージですが，加減算の時は個別の測定誤差が相乗的に影響しないのかな，という気がします（でも減るのは少し不思議ですが）．

・焼入れが 0.6 になる理由がわからない，（1-・・・）の式で計算しても同様なのか？：・・←次ページに記します．

本来3桁 ← $\underbrace{9.97}\times\underbrace{9.97}$

$$\left(1-\frac{\underbrace{99.4}009}{\underbrace{100.0}_{4桁}}\right)\times 100=\left(1-0.\underbrace{994}009\right)\times 100$$

$$=0.006\times 100=\underline{0.6\%}$$

1を有効数字として扱わないとしても，
結局 0.994 を引くことで 0.006
にしかならない．

1 を有効数字として扱うとしても，
$\frac{100.0}{100.0}$ なので4桁とすると 1.000，
$1.000-0.994=0.006$

2.4 第 1 回小テスト解答

Q.1 SI 単位系における圧力（応力）の単位の表記と読みを示せ．

A.1 Pa，パスカル

Q.2 標準大気圧 1013.25 hPa を工学単位系で表せ．（重力加速度 $g = 9.807\mathrm{m/s^2}$ として）
［6 点，部分点あり］

A.2 $1013.25\ \mathrm{hPa} = 101325\ \mathrm{Pa} = 101325\ \mathrm{N/m^2} = 1/9.807 \times 1/1000^2 \times 101325\ \mathrm{kgf/mm^2}$

$= 1.03319... \times 10^{-2}\ \mathrm{kgf/mm^2}$

$= 1.033 \times 10^{-2}\ \mathrm{kgf/mm^2}$

$= 1.033 \times 10^{4}\ \mathrm{kgf/m^2}$

$= 1.033\ \mathrm{kgf/cm^2}$ （面積の単位がどれでも整合性が取れていれば OK）