材料評価学　第 14 回

前回：　材料力学の「はりの曲げ」の問題における
・せん断力線図・曲げモーメント線図
・異なる形式のはり
・曲げ応力とは

今回：　材料力学の「はりの曲げ」の問題における
・はりの曲げ応力
・断面二次モーメントと断面係数

14.　はり（梁）の曲げ 4

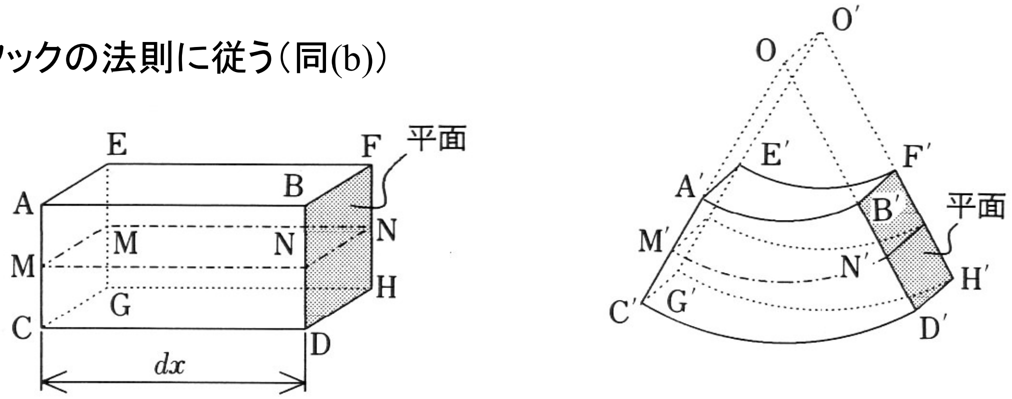
14.1　曲げ応力算出式の導出

● **前回の内容を踏まえ，曲げ応力算出式を導出するために以下の項目が成り立つと仮定する．**

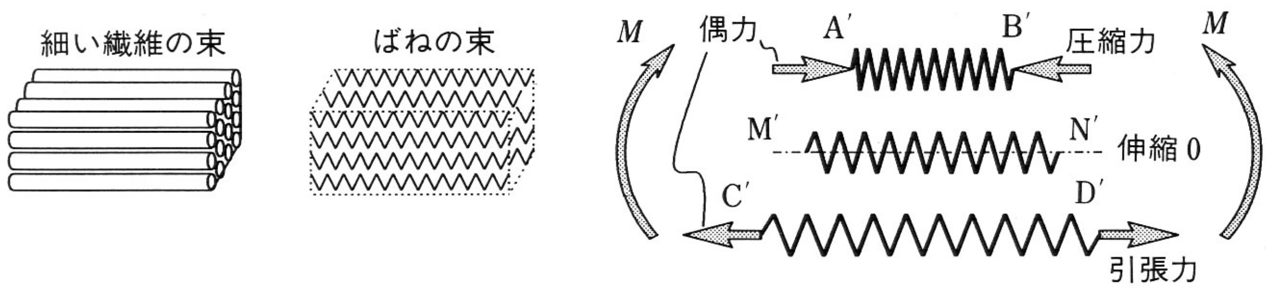
(1)　変形前に平面であった横断面は，曲げ変形後も平面を保つ（図 5.1(a)）

(2)　はりをいわば縦繊維の集合物とみなす→応力は単軸応力と考える（同(b)）

(3)　変形はフックの法則に従う（同(b)）



(a)



(b)

図 14.1　はりの曲げ応力算出式を求める上での仮定

●**曲げモーメント M が作用して下に凸に変形したはりにおいて，はり中の微小部分 dx を考える**

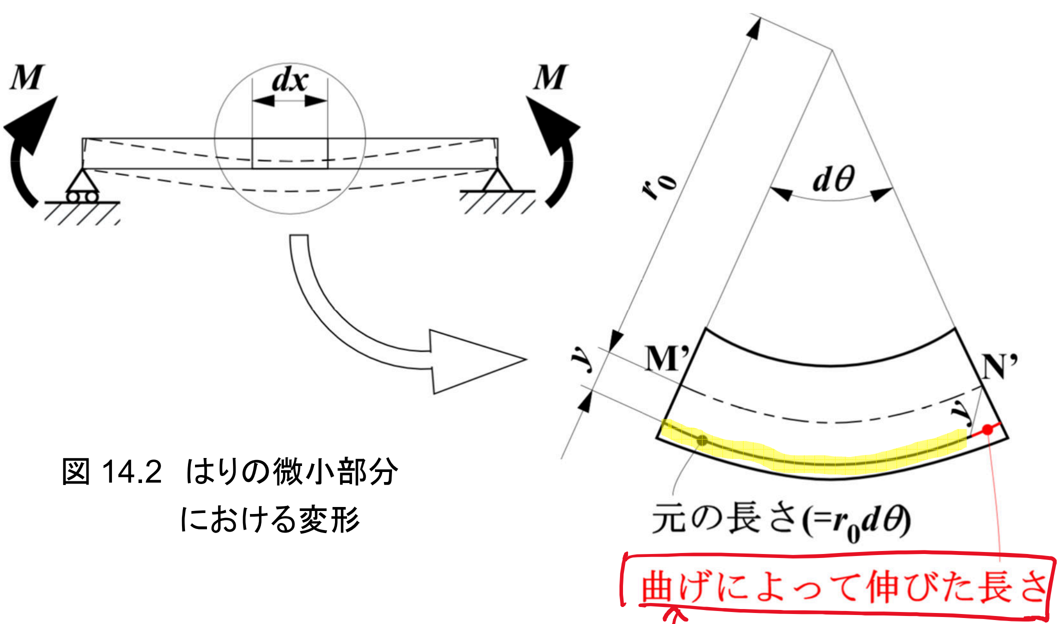


図 14.2　はりの微小部分における変形

・中立面 MN の曲率半径 r_0: $\boxed{r_0 d\theta} = dx$

・中立面から y 離れた位置でのひずみ ε: $\dfrac{\boxed{(r_0+y)d\theta - r_0 d\theta}}{r_0 d\theta} = \varepsilon = \dfrac{y}{r_0}$ … (1)

・応力は単軸でかつフックの法則に従う（前頁仮定(2), (3)より）:

$\sigma = E\varepsilon = E\dfrac{y}{r_0}$ … (2)

$\dfrac{\sigma}{y} = \dfrac{E}{r_0}$ … (2)'

⊃ ~~曲げ応力は中立面からの距離 y に比例~~

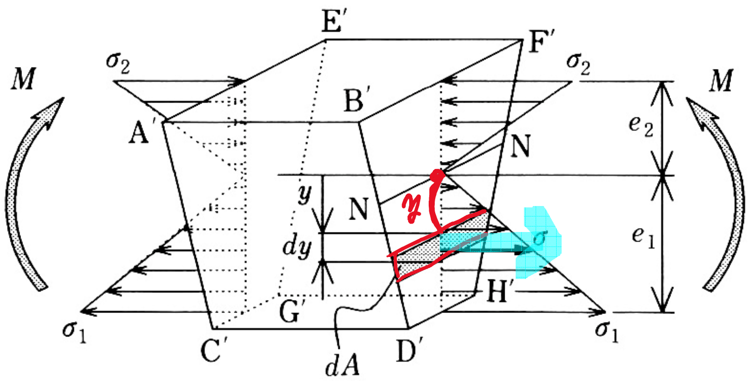


図 14.3　曲げ応力の分布

●曲げ応力は中立面からの距離 y に比例する

・微小面積 dA に作用する応力 σ→ dAに作用する力 $\boxed{\sigma dA}$

→ dA に 〃 モーメント $\sigma dA \times y$

・微小面積 dA に作用するモーメントの総和 ＝ 全体のモーメント $= M$

$M = \int \sigma y \, dA$ ← (2)式を代入

$= \dfrac{E}{r_0}\boxed{\int y^2 dA}$ → 「断面二次モーメント I」と呼ぶ

$= \dfrac{E}{r_0} I$ ← (2)'を代入・整理

$\therefore \sigma = \dfrac{M}{I} y$

14.2　断面二次モーメントと断面係数

●断面二次モーメント： はりが、断面と平行な軸(この場合はz軸)回りに変形する際の変形しにくさを表わす指標。

z軸回り：I_z

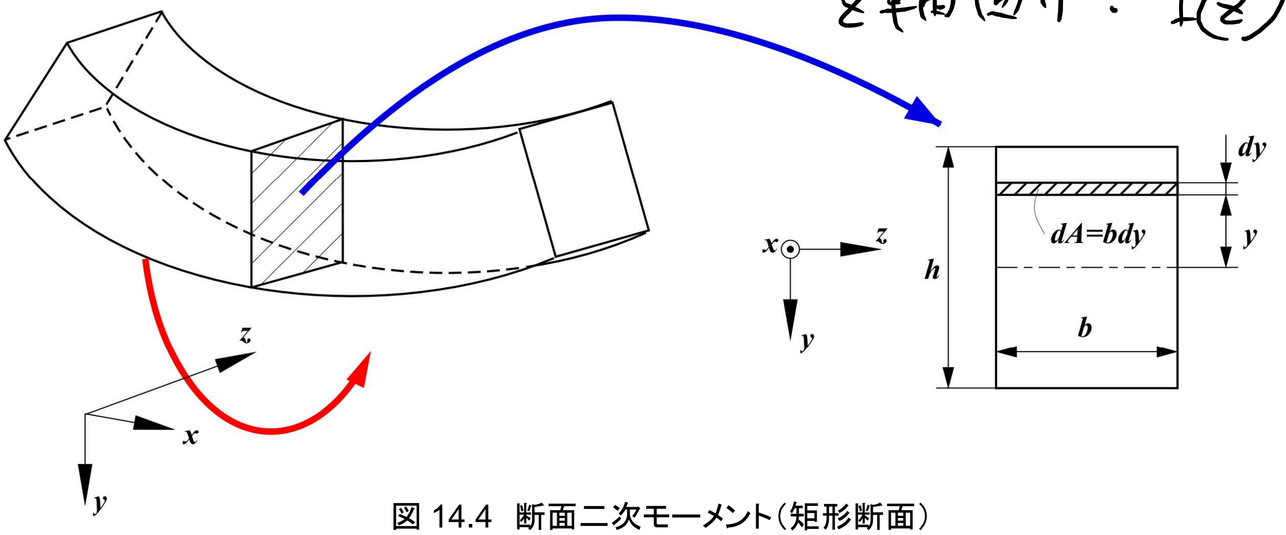


図 14.4　断面二次モーメント(矩形断面)

●回転軸（この場合は z 軸）周りの断面二次モーメント I_z の算出（矩形断面）

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b\,dy = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}$$

・前頁で導出した曲げ応力算出式: $\sigma = \frac{M}{I} y$ ··· σはMおよびyに比例する

⇩

・曲げ応力の最大値: σ_{max}：曲げモーメントの絶対値の最大値 $|M_{max}|$ および y_{max} により生じる。

⇩

・矩形断面・・・$y_{max} = h / 2$ → $\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{I_z} \cdot y_{max} = \frac{|M_{max}|}{\frac{bh^3}{12}} \cdot \frac{h}{2}$

$$= \frac{|M_{max}|}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{|M_{max}|}{Z}$$

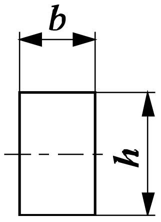
"Z

⇩

●矩形断面の断面係数： $Z = \frac{bh^2}{6}$

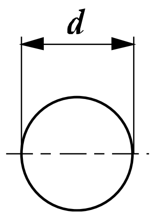
最大曲げ応力の算出式

$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{Z}}$$



$$I_Z = \frac{bh^3}{12} \quad , \quad y_{\max} = \frac{h}{2}$$

$$\boxed{z = \frac{bh^2}{6}}$$



$$I_Z = \frac{\pi d^4}{64} \quad , \quad y_{\max} = \frac{d}{2}$$

$$z = \frac{\pi d^3}{32}$$

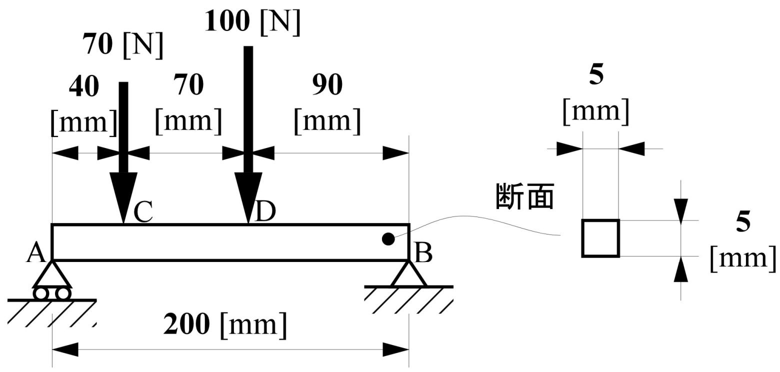
図 14.5　I_Z と z（矩形断面および円形断面）

・問い：導出した最大曲げ応力の算出式　$\sigma_{\max} = \dfrac{|M_{\max}|}{Z}$　および矩形断面の断面係数 $Z = \dfrac{bh^2}{6}$ より，$\sigma_{\max}$ を低減させるためにはどのような方法が効果的か？

・Z を大きくする → $b \cdot h$ を大きくする.

・$M_{\max}$ を小さくする → l を小さくする.

・例題：以下の集中荷重を受ける両端支持はりに生じる曲げモーメント分布式を導出し，最大曲げ応力 $\sigma_{\max}$ を求めよ.



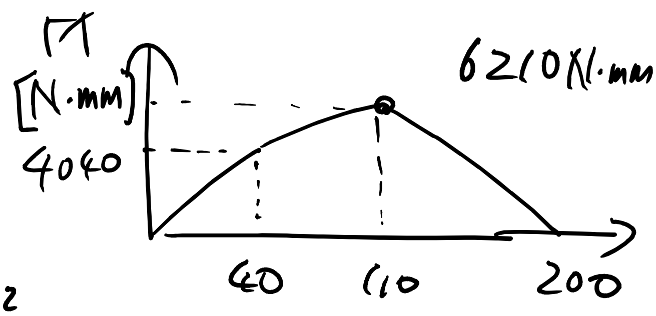
$x = 110$ mm で $|M_{\max}| = 6210$ N·mm

$$Z = \frac{125}{6}\ \text{mm}^3$$

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{Z} = \frac{6210}{\frac{125}{6}}$$

$$= 298.08\ \text{N/mm}^2$$

$$= 298\ \text{MPa}$$



（続き）

14.3　第 14 回講義に関する意見・感想・質問のまとめ

●意見・感想

・来週テストなのでしっかり復習する，曲げモーメントの値から曲げ応力が算出されるので特に丁寧に計算する，曲げ応力の式や断面 2 次モーメントの指揮をしっかり理解することが大事，小テストの復習を行う，回転の向きがわからなくなる時があるので復習する，最初から内容を復習する，式を立てるのが少し怪しいので立てられるようにする，直感的に理解できなかったので復習する：17

・小テストできた，満点取れるくらい勉強したのに少しだけ凡ミスして悔しい，小テストも残り 1 つなので頑張る，あまり復習をしなかったので図の描き方を思い出せなかった，集中荷重と分布荷重の解き方を混同してしまった，単位を書き忘れてしまった気がする，小テスト手応えがあった，よくできた方だと思うので嬉しい計算の小テストで毎回ミスしてる気がする，小テスト全くできなかったのでもっと問題を解く練習をするべき，小テストでつり合いの式の正負がわからなくなった：14←今回の小テストは平均 5.6 点，満点 9 名でした．細かい減点が多かったので，満点者数も平均点も伸びなかったようです．減点のポイントを解答例に書いておきましたので，定期試験ではそのようなミスがないよう注意してください．

・今回の授業で何となくまげに対する理解が深まった，モーメントについてわかるようになってきた，最大曲げ応力の求め方を理解できた，曲げモーメントの計算を繰り返すにつれて少しずつ慣れてきた，作図することで式の導出が視覚的に理解できることがわかった，曲げ応力の理論的導出を理解できた，物理は作図から始めるということを再度認識した：12←やはり例題を繰り返し解いていくことで，解き方が身に付いてくるようです．あと作図を如何に正確にできるか（＝理解が正確か？）ですね

・b と h を入れ替えるとき実物があったので実感しやすかった，b と h を大きくすることが効果的であることを理解した，σ max を低くするのに形状を変えてしまうこともできるのが面白かった，今までの知識が結びつくようで面白かった，弾性変形を勉強していたら昔の知識に接続できた：8←皆さんの身近にもはりのような形状で力を支えている構造がたくさんあると思いますので，それらのはりの断面形状に着目してみるとよりわかりやすくなると思います．

・最後の例題は良問であり難しかった，σ max は求められたが曲げモーメントを何も見ずに導出できなかった，最後の例題がこれまでの総合みたいで面白かった：4

・もう 5 月が終わってしまった，テストが近づくにつれ焦りを感じている，テストが近いのに少し置いていかれてる，期末対策を頑張る：4←もう 1 週間後ですね，準備をしっかりしてください．

・発言できて良かった←ありがとうございます！

・材料科学実験の内容がこの講義の前半と重なって理解が深まった←相互で理解が深まると思います．

・体調が悪くて授業に集中できなかった←体調大事です，週末に整えてください．

●質問

・昨年度の期末試験の平均点を教えて欲しい←去年は受験者 60 名で平均 77.2 点でした．90 点以上取った人が 21 名いましたし，持ち込み可ですのでしっかり準備してあれば簡単だと思います．

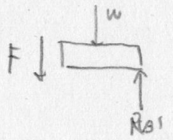
・TA から二郎が好きだと聞いたが？←好きですね，最近は脂にやられがちなので「脂少なめ」でコールしますが．

・なぜ r・dθ が元の長さ dx になるのか？←これは角度をラジアン単位で表すという前提（大学の数学ではそれが一般的かと思います）の場合の孤の長さの求め方ですので，ネットでも数学の教科書でも見直してみてください．かつ，M'-N'のラインの長さは変形前の M-N の長さと変わらない「中立面」である（＝長さは dx のまま）のため，r・dθ＝dx となります．

第 14 回講義に関する意見・感想・質問

・授業進行速度に関して　・小テストの難易度に関して　・授業内容の理解に関して

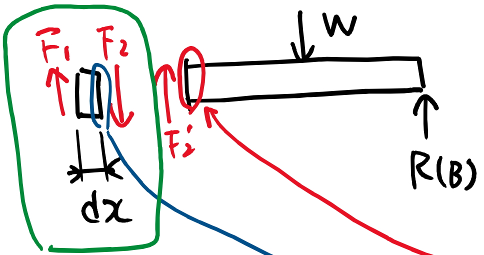
・理解が困難だった箇所に関して　・その他，授業全般に関して



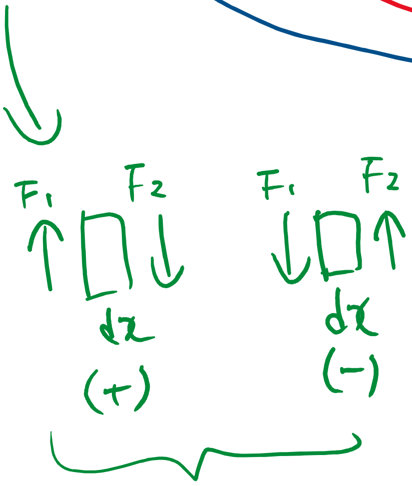
この場合のFの向きが分からないです。

モーメントについても同様で、どうなったら－になるかあまり理解してないです。

←正直，全般的に理解できていないようですね・・・



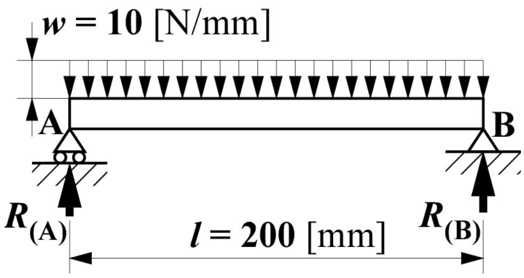
この場合、当然ですが まず F_2' の向きは W と R(B) の大小関係によって決まります。W > R(B) なら F_2' は上向きにならなければつり合いません。よって、F_2' が作用する面と相対する dx の面で作用する力 F_2 は F_2' と相殺する向きとして下向きになります。これと同様のことを左側の領域でも考えると、F_1 の向きは上向きになるはずです。この dx における F_1 と F_2 の向きの組み合わせに基づき、せん断力F（一対の力 F_1 と F_2 によるせん断する力の作用）の符号が決まります。第12回の授業でちゃんと説明しているので、よく見直して理解して下さい。



せん断力Fの
符号の決め方

14.4　　第 13 回小テスト解答

Q.1　下図の分布荷重を受ける両端支持はりにおけるせん断力分布・曲げモーメント分布を求め，S.F.D. および B.M.D.を作成すると？



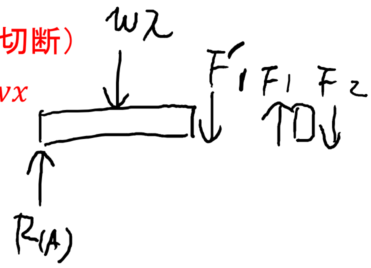
A.1

支持反力算出：仮想的な集中荷重を考える

$$\therefore R_{(A)} = R_{(B)} = \frac{wl}{2} = 1000[\mathrm{N}]$$

せん断力分布算出（はりの中心より左側の任意の位置で仮想的に切断）

力のつり合い式： $-R_{(A)} + wx + F'_1 = 0 \quad \rightarrow \quad F'_1 = R_{(A)} - wx$

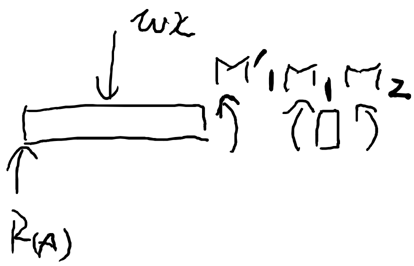


符号：（＋）　$\therefore F = R_{(A)} - wx = 1000 - 10x[\mathrm{N}]$

モーメント分布算出（回転中心：仮想的な切断位置）

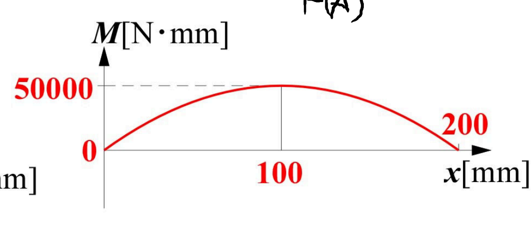
モーメントのつり合い式： $-R_{(A)} \cdot x + wx \cdot \frac{x}{2} + M'_1 = 0 \quad \rightarrow \quad M'_1 = R_{(A)} \cdot x - \frac{wx^2}{2}$

符号：（＋）　$\therefore M = R_{(A)} \cdot x - \frac{wx^2}{2} = 1000x - 5x^2[\mathrm{N \cdot mm}]$



SFD および BMD 作成：

S.F.D



B.M.D

◎典型的な減点（誤解答）パターン

- ・まず支持反力も出さないうちに力のつり合い式を立てようとする
- ・値が与えられている問題なのに最後まで記号で解答する
- ・算出した値や式に単位を付さない
- ・作図しない　or　作図がいいかげん（微小体積 dx の部分の省略，等）
- ・記号の取り扱いがいい加減（授業とは異なる記号で式を立てる，等）