

## 材料評価学 第12回

- 前回：
- 材料力学の「はりの曲げ」の問題における
    - ・「材料力学」とは
    - ・「せん断力」と「曲げモーメント」とは
    - ・はりの曲げの解法
    - ・支持反力の算出



- 今回：
- 材料力学の「はりの曲げ」の問題における
    - ・せん断力分布の算出
    - ・曲げモーメント分布の算出

## 12. はり（梁）の曲げ2

### 12.1 ②せん断力分布の算出

●前回と同じモデル（集中荷重を受ける両端支持はり）

AC間（集中荷重の位置より左側）

1) 任意の位置  $x$  にて仮想的に切断

・ $x$  までの領域における力のつり合い式:

$$-R(A) + F_1' = 0$$

$$F_1' = R(A) = \frac{b}{l} W$$

・ $x$  以降の領域における力のつり合い式:

$$W - R(B) - F_2' = 0$$

$$F_2' = W - R(B) = R(A) = \frac{b}{l} W$$

∴  $F_1'$  と  $F_2'$  は大きさが等しく向きが逆

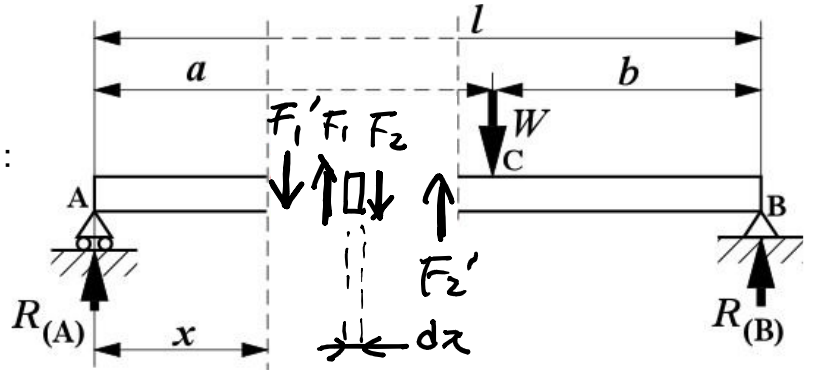
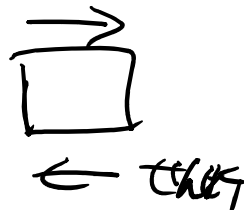


図 12.1 せん断力分布算出 1

2)  $x$  の位置におけるはりの微小領域（長さ:  $dx$ ）を考える

・接する面における力のつり合い: 等しい大きさで向きが逆な力があれば相殺=つり合う

$$F_1' = F_1, \quad F_2' = F_2$$

$$F_1 = F_1' = \frac{b}{l} W, \quad F_2 = F_2' = \frac{b}{l} W$$

∴  $F_1$  と  $F_2$  も大きさが等しく向きが逆

3) つまり、はりの微小領域には大きさが等しく ( $\frac{b}{l} W$ ) 向きが逆な一対の内力  $F_1$  と  $F_2$  が作用する

集中荷重の位置の右側 (CB間) では  
どうなるか?

●CB間 (集中荷重の位置より右側)

1)  $x$  で仮想的に切断

・ $x$  までの領域における力のつり合い式:

$$-R(A) + W - F_1' = 0$$

$$F_1' = W - R(A)$$

$$= R(B) = \frac{a}{l}W$$

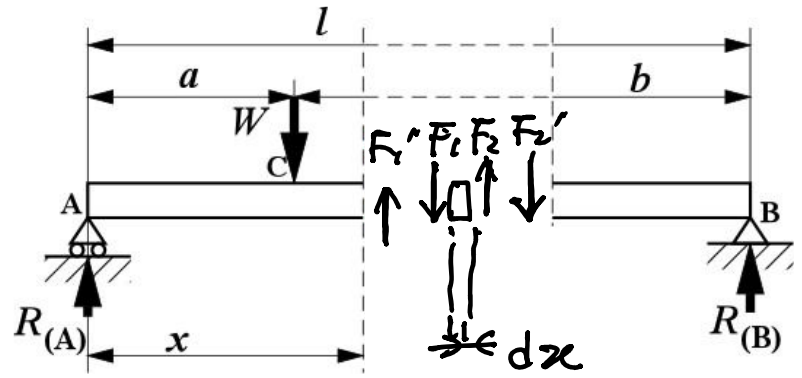


図 12.2 せん断力分布算出 2

・ $x$  以降の領域における力のつり合い式:

$$R(B) - F_2' = 0, \quad F_2' = R(B) = \frac{a}{l}W$$

∴  $F_1' = F_2'$  (AC間と同様)

2)  $x$  の位置におけるはりの微小領域 (長さ:  $dx$ ) を考える

・接する面における力のつり合い:  $-F_1' + F_1 = 0, \quad -F_2 + F_2' = 0$

$$F_1 = F_1' = \frac{a}{l}W, \quad F_2 = F_2' = \frac{a}{l}W$$

∴  $F_1 = F_2$  (AC間と同様)

3) つまり、はり全体にわたって一対の内力  $F_1$  と  $F_2$  が作用することではりがせん断される

「せん断力  $F$ 」と定義する。

●注 ①せん断力の大きさ: AC間

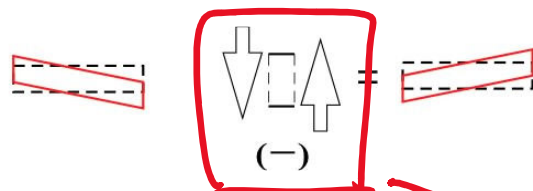
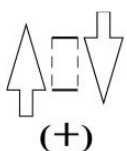
$\frac{b}{l}W$   
 $\frac{a}{l}W$  } と変化する。

②せん断力の方向: AC間

↑□↓ (+)

CB間

↓□↑ (-)



$$F = \begin{cases} +\frac{b}{l}W & (\text{AC間}) \\ -\frac{a}{l}W & (\text{CB間}) \end{cases}$$

図 12.3 せん断力の符号

### 12.2 ③ 曲げモーメント分布の算出

●せん断力分布と同様、AC間

1) 任意の位置  $x$  にて仮想的に切断

・ $x$  までの領域におけるモーメントの

つり合い式:

$$-R(A)x + M_1' = 0$$

$$M_1' = \frac{b}{l} W x$$

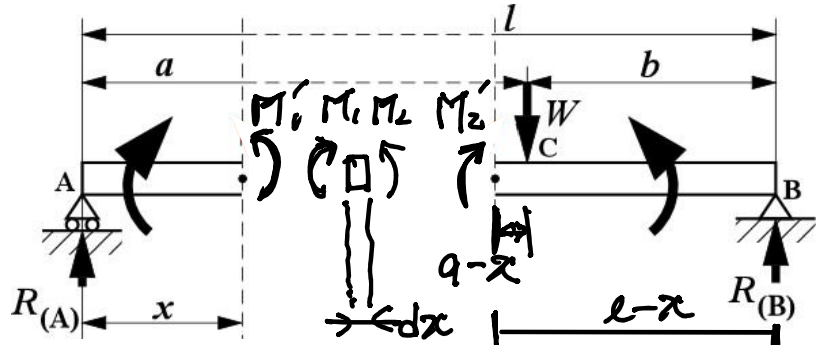
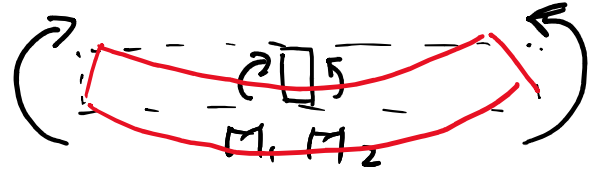


図 12.4 曲げモーメント分布算出 1

・ $x$  以降の領域におけるモーメントのつり合い式:

$$-M_2' - W(a-x) + R(B)(l-x) = 0$$

$$M_2' = \frac{b}{l} W x$$



∴  $M_1'$  と  $M_2'$  は大きさが等しく向きが逆

2)  $x$  の位置におけるはりの微小領域(長さ:  $dx$ )を考える

・接する面におけるモーメントのつり合い:  $-M_1' + M_1 = 0, M_2 - M_2' = 0$

$$M_1 = M_1' = \frac{b}{l} W x, M_2 = M_2' = \frac{b}{l} W x$$

∴  $M_1$  と  $M_2$  も大きさが等しく向きが逆

3) つまり、はりの微小領域には 大きさが等しく  $(\frac{b}{l} W x)$  向きが逆な一対のモーメント  $M_1$  と  $M_2$

が作用する

↓  
曲げモーメント

●CB間 (集中荷重の位置より右側)

1)  $x$  で仮想的に切断

・ $x$  までの領域におけるモーメントの

つり合い式:

$$-R(A)x + W(x-a) + M_1' = 0$$

$$M_1' = \frac{q}{l} W (l-x)$$

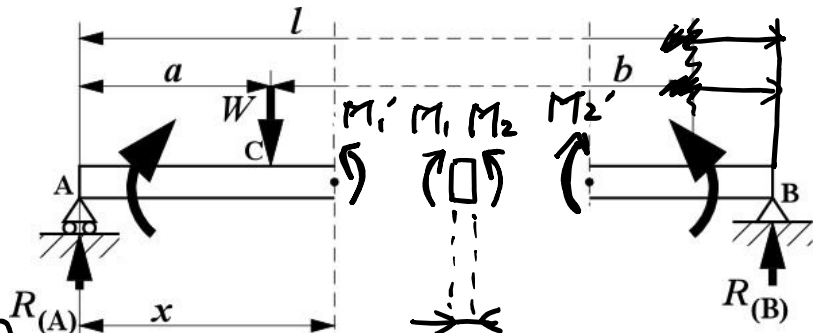


図 12.5 曲げモーメント分布算出 2

・ $x$  以降: 省略 ( $M_2' = \frac{q}{l} W (l-x) = M_1'$ )

∴ AC間と同様 ( $M_2' = M_1'$ )

2)  $x$  の位置におけるはりの微小領域 (長さ:  $dx$ )

$$M_1' - M_1 = 0$$

$$M_2 - M_2' = 0$$

$$M_1 = M_1' = \frac{q}{l} W (l-x), \quad M_2 = M_2' = \frac{q}{l} W (l-x)$$

∴ AC間と同様 ( $M_1 = M_2$ )

3) つまり, はり全体にわたって一対のモーメント  $M_1$  と  $M_2$  が作用することではりが曲がる

「曲げモーメント  $M$ 」と定義する.

●注 ①曲げモーメントの大きさ:

AC間  $\frac{b}{l} W x$   
 CB間  $\frac{q}{l} W (l-x)$  と変化する

②曲げモーメントの方向:

AC間  $\uparrow \square \curvearrowright$   
 CB間  $\uparrow \square \curvearrowleft$  で変化しない

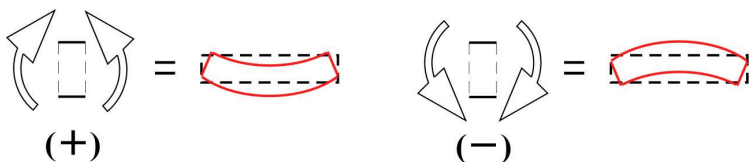


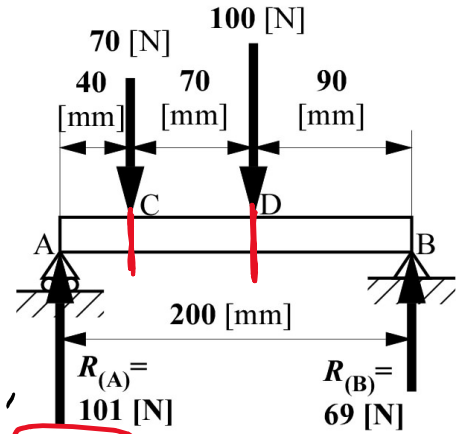
図 12.6 曲げモーメントの符号

$$M = \begin{cases} + \frac{b}{l} W x & (\text{AC間}) \\ + \frac{q}{l} W (l-x) & (\text{CB間}) \end{cases}$$

・ 例題: 右図の両端支持はりにおいて,

A.1 C点間のせん断力  $F$  を求めよ.

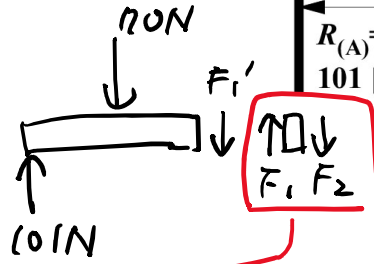
A.2 C点間の曲げモーメント  $M$  を求めよ.



Q.1

$$-(101 + 70) + F_1' = 0$$

$$F_1' = 31 \text{ N}$$



∴ 符号は (+) ... ∴  $F = 31 \text{ N}$

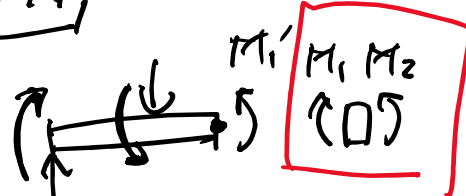
Q.2

$$-(101)x + 70(x - 40) + M_1' = 0$$

$$M_1' = 101x - 70(x - 40)$$

$$= 101x - 70x + 2800$$

$$= 31x + 2800 \text{ N}\cdot\text{mm}$$



∴ 符号は (+) ...  $M = 31x + 2800 \text{ N}\cdot\text{mm}$

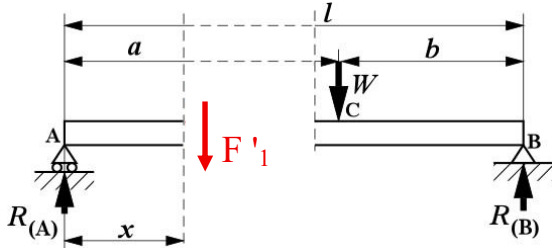
注!  
解答の際  
必ずカと  
モーメントの  
つり合いの  
図を付ける  
こと。  
(高いと減点)

## 12.4 第12回講義に関する意見・感想・質問のまとめ

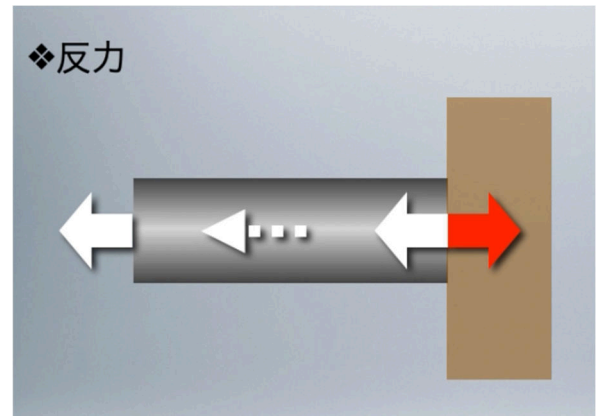
### ●意見・感想

- ・難しいところが多かったのでしっかり復習する, 条件が多く複雑なのでまずは図をきちんと描けるようになる, ここから計算が大変になるので頑張る, 力とモーメントの関係をよく理解する, どんな式が立てられるか位置関係もしっかり確認する, 表面上で覚えてしまっているののでしっかり理解する, 大学の内容らしく応用してモーメントが使われていたのでしっかり復習する, いつも以上に復習する, モーメントのつり合いは回転を打ち消す向きであることに気をつける, 計算はできたが意味はよくわかっていないので復習する:  
22←確かに, 図をきちんと描けるようになることが理解への近道ですね.
- ・内容量が多く少し疲れた, モーメントの矢印と力の矢印が多く出てきたがあまり理解できなかった, 途中でこんがらがってしまった, 内容が難しく理解が不十分だった, 難しくて次の小テストが不安, なんとなく分かる気がするがうまくイメージできない, 理解できていないところがわからない, 色々出てきて大変だった, 曲げモーメントがあまり理解できなかった,  $dx$  での力をイメージするのが難しかった, 新しい概念だったので理解するのに戸惑った:11←今回の内容は, この科目の中で一番とっつきにくいところだと思います.
- ・高校物理の復習のように感じた, せん断力と曲げモーメントの求め方と符号の意味について理解できた, スムーズに理解できた, 少し難しかったが解説を聞いて理解できた, 8割くらいは理解できた:6
- ・小テスト自信がある(ものすごく嬉しい), 今回の小テストは高校物理で簡単に解けた, 小テストで文字で解くより数値の方が解きやすい, 小テストはしっかりできた:9←今回の小テストは, 平均 8.9 点, 満点 41 名でした. さすがに高校物理の内容でしたので, 完璧に解けていた人がほとんどでした.
- ・過ごしやすい室温で集中できた, 最近急に暑くなってきた:2←ホントそうですね・・・服選びに困ります.
- ・急に勉強意欲が湧いてきた(なぜか分からない)←きっかけが何であれ, 良いことです!
- ・補講日を忘れずに来れた自分に誇りをもちたい←確かに!
- ・107 講義室のスライドが小さくて見落とした部分もあった←やはり 103 講義室の方が何かとやりやすいですね.
- ・期末試験目前なので優先順位をしっかりと決めて取り組む
- ・高校の物理では変形しない物体を扱っていたので材料の変形を考えるのは新鮮

### ●質問

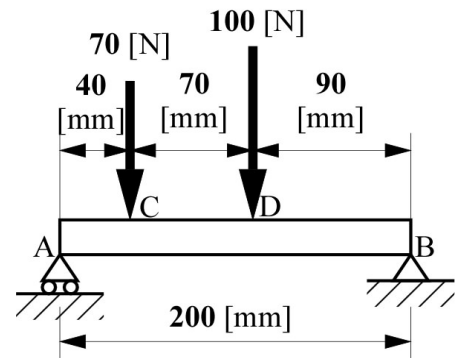
- ・せん断力の向きの決まり方がよく分からなかった,  $x$  の場所の  $F'$  と  $M'$  の向きがわからない←下図の仮想切断の位置 ( $x$ ) の左側の領域(上向きの支持反力  $R(A)$  が既に作用している)を考えると, そこでの上下方向の力のつり合いを取るためには,  $F'$  が下向きにならなければならないことが理解できないですか・・・?  $M'$  も考え方としては同一です.
- 
- ・どうして回転中心である点で  $M'$  を考えているのか?← $M'$  は図としては回転中心に直接作用するように描いていますが, 厳密には「 $x$  より左側の領域における,  $R(A)$  による時計回りのモーメントが,  $x$  より右の領域に作用することによる反作用としてのモーメント」を  $M'$  として描いており, 「荷重 × 距離」という成り立ちのモーメントではありません.
  - ・2 ページの 1)「 $x$  までの領域における力のつり合い式」において  $F'1$  の符号が-なのが分からなかった←前回行った「支持反力の算出」において, 力の向きを示す符号の約束として「上向き:(-)」と定義したからです.  $R(A)$  も同じですね?
  - ・私は作用・反作用と力のつり合いは別物と考えていて(作用・反作用は”法則”, 力のつり合いは運動方程

式という”法則”から導かれる”定理”),  $F_1=F_2$  となるのは作用・反作用であり  $F_1=F_2$  は力のつり合いだと思っただが, どうなのか? ←そこまで厳密に考えたことは正直ありませんでしたが, 力学においてそこまで厳密に区別を付ける必要があるのかは個人的には不明確です. 例えば, 組織学のときに説明したように壁に一端を固定された棒の自由端を引っ張る場合(下図), 引っ張る力は棒の中を伝達して固定端に達して壁を引っ張ります. この力の作用の反作用として, 壁も棒を反対方向に引っ張ります(反力). この状態の棒と壁の接点において, 力のつり合いが取れることとなります. つまり, これは「作用・反作用によって力のつり合いが取れるケース」ということとなります.



## 12.5 第11回小テスト解答

Q.1 右図の両端支持はりにおける支持反力を求めよ。  
(この計算において有効桁数は特に考慮しない)



A.1 力と回転モーメントのつり合い式から支持反力を求める.

$$\begin{cases} -R_{(A)} + 70 + 100 - R_{(B)} = 0 \\ -70 \cdot 40 - 110 \cdot 100 + 200R_{(B)} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_{(A)} = 170 - R_{(B)} \\ R_{(B)} = 69 \end{cases} \rightarrow R_{(A)} = 101$$

$$\therefore R_{(A)} = 101 \text{ N}, R_{(B)} = 69 \text{ N}$$

注: 上記のような「力とモーメントのつり合い式」からではなく、「モーメントのつり合い式を2本立ててそれぞれから求めた」場合も正解とした.