

計測工学 第7回

前回：

- ・ 相関係数
- ・ 回帰分析



今回：

- ・ 時系列データとは
- ・ 自己相関関数

7.1 時系列データとは : 時間 t の経過とともに変化する現象をデータ化したもの

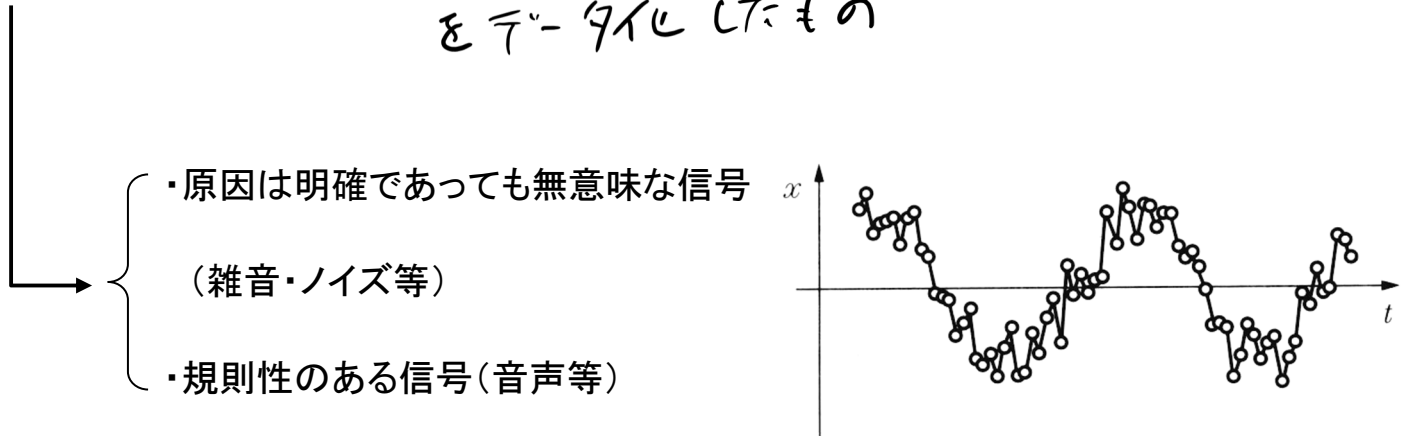


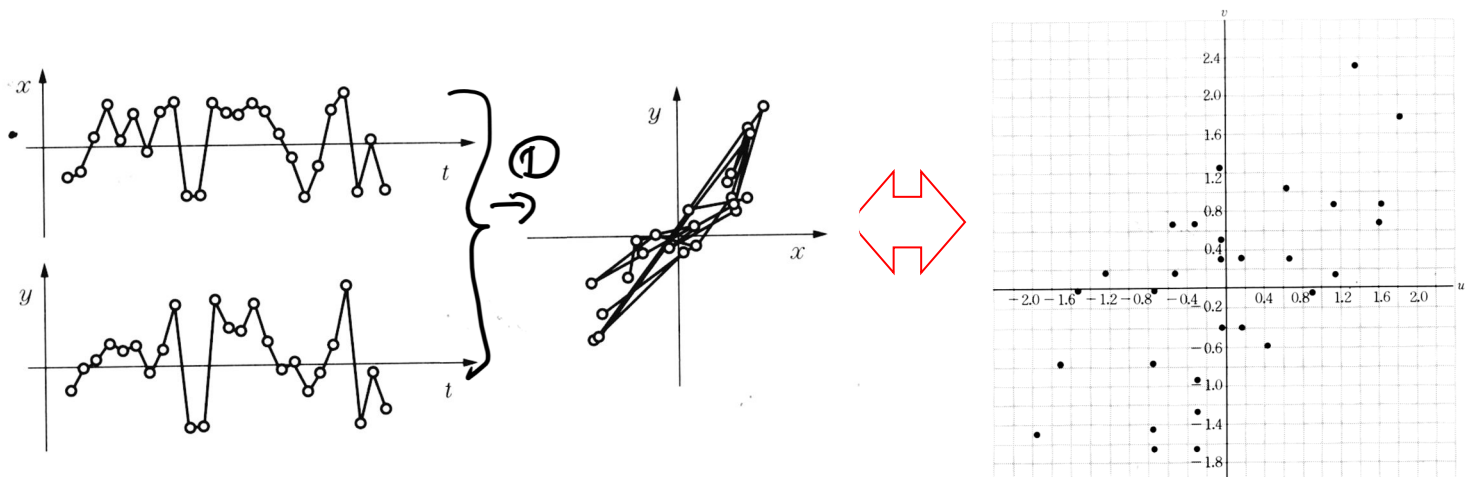
図 7.1 時系列データの例

問い: 時系列データから規則性(周期性)を見いだすには, どのような方法があるか?

- ・移動平均をとる.
- ・元の波形と、位相を変化させた(=位置をずらした)もう一つの波形を仮定して、両者の一致度合いを比較する → 自己相関

- $x = x(t)$, $y = y(t)$ の2つの時系列データを考える.
(仮定: 時間平均値が0である, $\bar{x} = \bar{y} = 0$)
時刻 $-\frac{T}{2} \sim \frac{T}{2}$ (周期 T)

- ① 時間パラメータ t を消去して2次元座標系に両方プロットする ... 共分散 S_{xy} , 相関係数 r の考え方を適用する.

図 7.2 $x(t)$ と $y(t)$ の相関がある場合

7.2 自己相関関数

・共分散 S_{xy} , 相関係数 r の定義式:

$$S_{xy} = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \quad r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_x^2} \sqrt{S_y^2}} = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

$$C_{xy} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t)dt, \quad R = \frac{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t)dt}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt} \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y^2(t)dt}}$$

② T が十分に長い ($T \rightarrow \infty$.. 時間的母集団が大きい) なら

$$C_{xy} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t)dt, \quad R = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t)dt}{\sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt} \cdot \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y^2(t)dt}}$$

③ 「 x と y 」 ではなく, x の時系列データ $x(t)$ の周期性に着目する

● もし $x(t)$ が周期性をもつ (周期 T) なら, $x(t)$ と $x(t + \tau)$ [$\tau = nT, n = 1, 2, \dots$] との間で強い相関を示すはず.

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t + \tau)dt \quad : \text{自己相関関数}$$

$$R(\tau) = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t + \tau)dt}{\sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt} \cdot \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t + \tau)dt}} \quad : \text{自己相関係数}$$

・例題: $x(t) = a \sin(\omega t)$ の場合の自己相関関数 $C(\tau)$ を求めよ.

$$x(t+\tau) = a \sin\{\omega(t+\tau)\} = a \sin(\omega t + \omega\tau)$$

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t + \omega\tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t) \cdot (\sin \omega t \cos \omega\tau + \cos \omega t \sin \omega\tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\underbrace{\sin^2 \omega t \cdot \cos \omega\tau}_{\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)} + \underbrace{\sin \omega t \cdot \cos \omega t \cdot \sin \omega\tau}_{\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}}) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\omega t}{2} \right) \cos \omega\tau + \frac{\sin 2\omega t}{2} \sin \omega\tau \right\} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{T} \left\{ \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \omega\tau + \left[-\frac{\cos 2\omega t}{4\omega} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \omega\tau \right\} \\ &= a^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \left[\frac{T}{2} - \frac{\sin \omega T}{2\omega} \right] \cos \omega\tau + \frac{1}{T} [0] \sin \omega\tau \right\} \\ &= a^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin \omega T}{2\omega T} \right) \cos \omega\tau = \underline{\underline{\frac{a^2}{2} \cos \omega\tau}} \end{aligned}$$

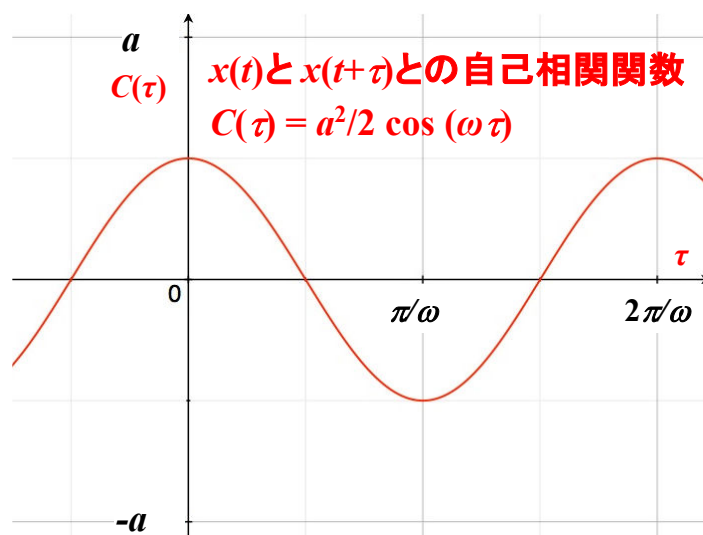
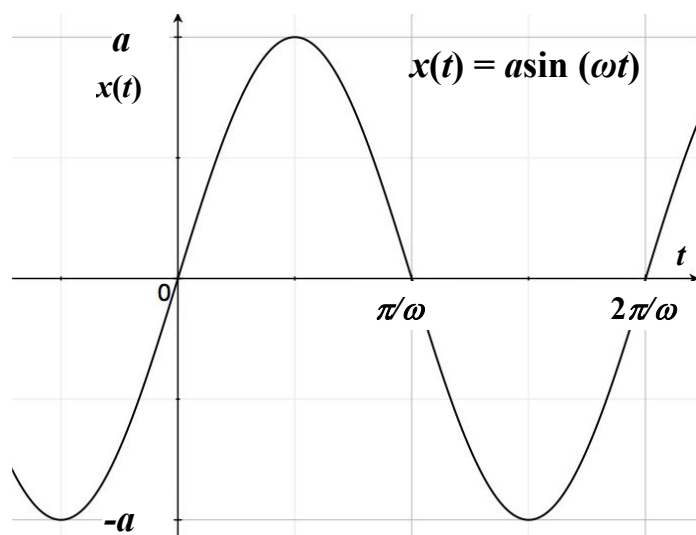


図 7.3 $x(t)$ と $C(\tau)$

- ・位相差 $\tau = 0, 2\pi/\omega$ のとき、 $C(\tau)$ が最大
 $\rightarrow x(t)$ と $x(t+\tau)$ は完全に一致
- ・位相差 $\tau = \pi/\omega$ のとき、 $C(\tau)$ は最小
 $\rightarrow x(t)$ と $x(t+\tau)$ は反転 (完全に一致しない)

●実際の測定ではノイズの無い正弦波を得られるようなことは無い

- ・ 時間に無関係な乱数で与えられるような雑音信号 $r(t)$ を、元の正弦波信号 $x(t)$ に重畳した場合作る。

$$C(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \omega \tau + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} r(t)r(t+\tau)dt$$

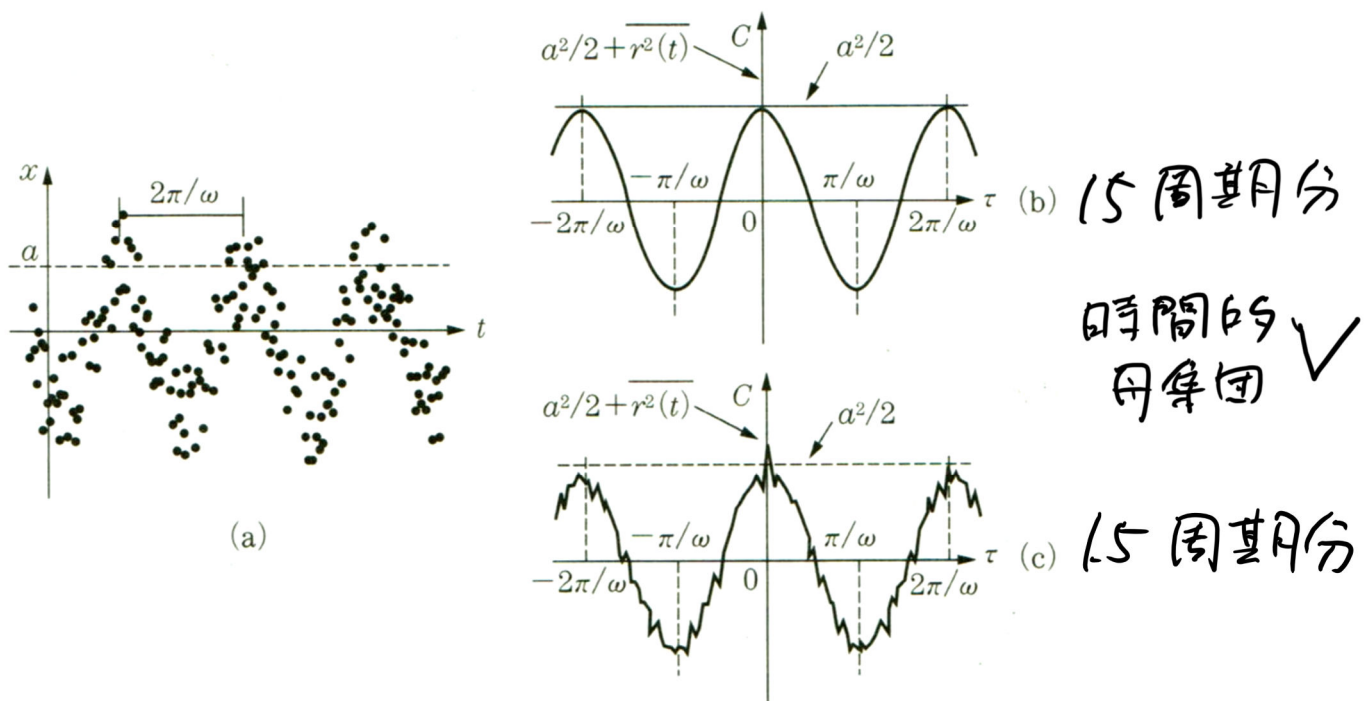


図 7.4 ノイズを含む時系列データの自己相関関数

- ・ 十分長い $x(t)$ データが利用可能であれば、周期性に関する情報が求めた自己相関関数に反映される。

7.3 第7回講義に関する意見・感想・質問のまとめ

●意見・感想

- ・テストに向けて復習する, テスト前日だがしっかり対策する, 小テストの内容をしっかりできるようにしていく, テスト前日の内容が出るのは困るが頑張るしかない, 評価学では時間に追われたので電卓の打ち込みにてこずらないようにする, 焦らないで解き切りたい, 欠席した回の内容を含めて明日の試験の対策を完璧にする:20←日程に関しては本当に申し訳ないです…メインは前回までの内容ですので, 勉強頑張ってください!
- ・自己相関の求め方を理解した, 積分の問題がテストに出ないと聞いて安心した, $C(\tau)$ を間違えずに計算できたのが嬉しかった, 勉強してきたので授業の理解度がいつもより良かった, 時系列データについて理解した, 三角関数の変換について忘れていたので大変だった, 今日の内容をテストに出されたら絶対に時間が足りなくなると思った:14
- ・相関係数について復習を行った, 自己相関関数についてしっかり復習する, 小テストで標本分散と不偏分散の式が曖昧になったので復習する, あまりパツとしない内容だったので理屈を知れるようにする, 自己相関関数や係数は今まで見たことがなかったのでしっかり復習する:7
- ・今回だけでなく全体的に小テストをしっかり解けたので良かった, 小テストはそこまで悪くない出来だと思う, 小テストで復習の成果が出た, 計算ミスに気づくのが遅かった:5←今回の小テストは, 平均 9.1 点, 満点 29 名でした. とうとう 9 点台に到達しました.
- ・自己相関関数の考え方が新しくとても難しかった, 自己相関関数が複雑で理解できなさそうだった, 正直何をやっているかもわからなかった, 前回に比べて一気に複雑になって理解に必死だった:4
- ・データを得たときに適切に評価することができるようになった, 実験 II の内容に反映できるような内容だった:2←それは良かったです!
- ・小テストの解説は毎回してほしい←毎回解答を web で示していますが, それで不十分ですか?
- ・わかりやすかった
- ・明日は電卓を絶対忘れない←絶対ですね!
- ・第8回以降も引き続き頑張る←頑張ってください.
- ・今日の T シャツもかわかった←ありがとうございます, そんなに T シャツが注目されるとは.
- ・みんなの意見・感想・質問を HP から見ることで勉強になることや面白いコメントが多くて見ていて楽しかった←勉強の役に立ったのなら何よりです!

●質問

- ・最後のノイズの影響について, 十分長い $x(t)$ データであれば雑音信号の項が 0 に近づく, ということか?←その通りです.
- ・明日の試験は何分間なのか? (2 名)←私の他の科目と同様に 80 分です.
- ・自己相関関数も相関係数のように目安があるのか?←自己相関関数はないと思います. 自己相関係数の方は, その成り立ちからして相関係数と同様の「max:1」かと思います(実際に自己相関係数を出したことがないので想像です).

7.4 第6回小テスト解答

Q.1 2つの標本変数 x と y における共分散 S_{xy} , および x の標本分散 S_x^2 の定義式について, 空欄に記入して式を完成させよ. [4 点]

A.1

$$S_{xy} = \frac{1}{\boxed{n}} \sum_{i=1}^n \left(\boxed{x_i - \bar{x}} \right) \left(\boxed{y_i - \bar{y}} \right)$$

$$S_x^2 = \frac{1}{\boxed{n}} \sum_{i=1}^n \left(\boxed{x_i - \bar{x}} \right)^{\boxed{2}}$$

Q.2 3人の学生の体重 x と身長 y のデータ(下表)から相関係数を求めた上で, 体重と身長の間での相関について判断せよ. [6 点]

A.2 $n = 3$, $\bar{x} = 71$, $\bar{y} = 173$

$$S_{xy} = \{(2 \times 11) + (1 \times -1) + (-3 \times -10)\} / 3 = 17$$

$$S_x^2 = \{(2)^2 + (1)^2 + (-3)^2\} / 3 = 14/3$$

$$S_y^2 = \{(11)^2 + (-1)^2 + (-10)^2\} / 3 = 74$$

$$\therefore r = \frac{17}{\sqrt{\frac{14}{3}} \cdot \sqrt{74}} = 0.914... = 0.9$$

強い正の相関がある

	No. 1	No. 2	No. 3	
x	73	72	68	$\bar{x} =$
$x_i - \bar{x}$	+2	+1	-3	71
y	184	172	163	$\bar{y} =$
$y_i - \bar{y}$	+11	-1	-10	173