

計測工学 第4回

- 前回：
- ・ 測定の不確かさ
 - ・ 正規分布
 - ・ 偏差値



- 今回：
- ・ 測定における平均
 - ・ 標本分布
 - ・ 母平均の区間推定

4.1 測定における平均

・母平均：母集団の完全な平均値, 「真の値」とみなす

例: 全校生徒の身長平均, クラス全員の試験平均 $\Rightarrow$ 母平均を求める

・測定における母平均: 無限回の繰返し測定に基づき得られる

$\downarrow$
測定においては母平均は求められない, 「未知数」

$\downarrow$
有限回の繰返し測定 (= 有限個の標本) による「標本平均」で代用する。

標本平均 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ n : 標本数, x_i 1個々の標本

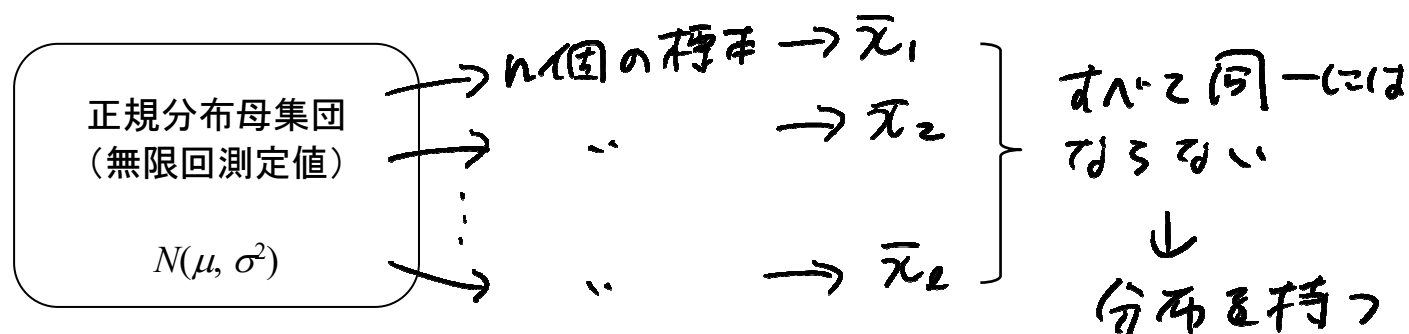
母平均 μ

母分散 σ^2 (母標準偏差 σ)

4.2 標本分布

●正規分布する母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ (例: 偶然誤差を含む無限回の測定値) から n 個の標本 (n 回の測定) を抽出し, 標本平均 $\bar{x}$ を算出する。

問い: $\bar{x}$ の算出を複数回行った場合, どのような結果が得られるか?



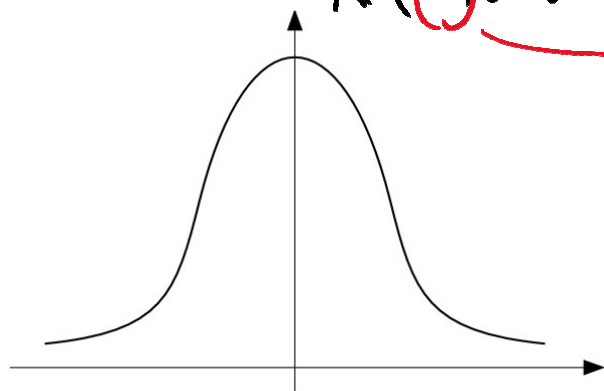
●正規分布する母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から抽出した n 個の標本による標本平均 $\bar{x}$:

$N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ という正規分布を示す... 元の標本分布

・標本分布 $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ に基づき、母平均 μ を推定することが可能。

・母集団の正規分布

$N(\mu, \sigma^2)$

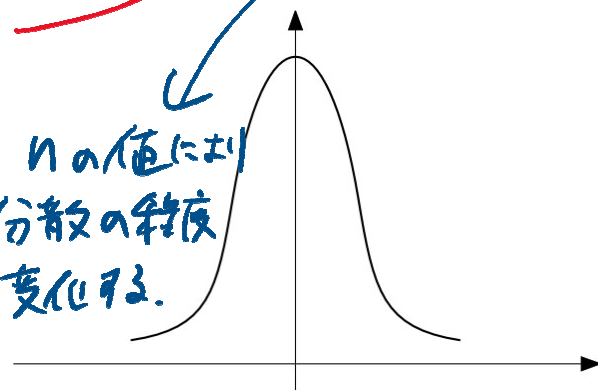


μ は同一



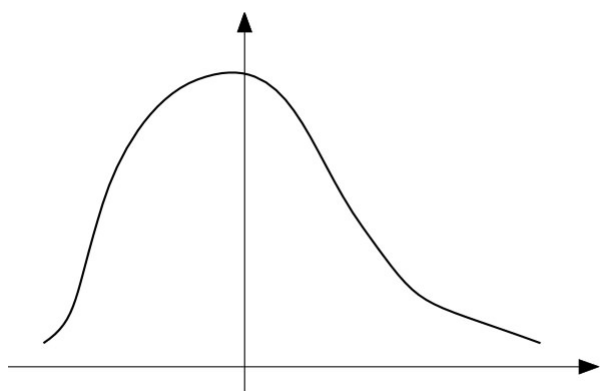
・元の標本分布
 $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

n の値に対し
分散の程度
が変化する。

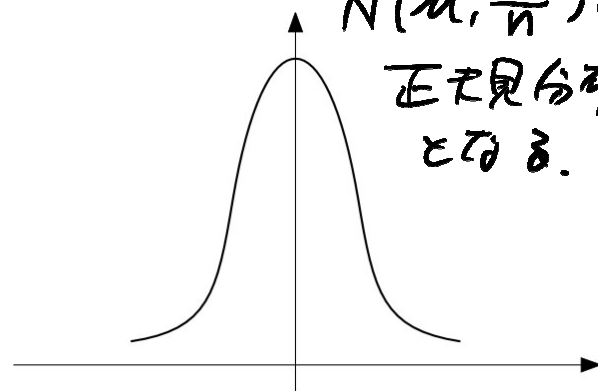


・ちなみに... 標本 n が大きければ、母集団が正規分布でなくとも $\bar{x}$ の標本分布は近似的に

$N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ の正規分布となる。→「中心極限定理」



元の標本分布は
 $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ の
正規分布
となる。



4.3 標本分布の標準化

- 正規分布に従う標本分布 $N(\mu, \sigma^2)$ は、変数変換 $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ により標準化 ($\rightarrow N(0, 1^2)$) することが可能.

→ 正規分布表が利用できる.

・例題: 小学生の1ヶ月の小遣いが, $\mu = 2250$ 円・ $\sigma = 360$ 円の正規分布に従うとき, ランダム

抽出した36名の小遣い平均 $\bar{x}$ が2400円を超える確率を求めよ.

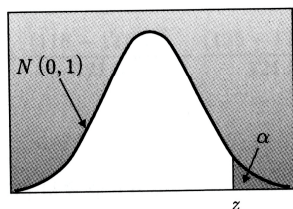
$$\underline{0.62\%} \quad P(\bar{x} > 2400) = P\left(z > \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(z > \frac{2400 - 2250}{360/\sqrt{36}}\right)$$

上側確率用正規分布表 $= P(z > 2.50)$
 から, $z = 2.50$ のとき $\alpha = 0.0062$

$$\therefore \underline{0.62\%}$$

付表1 正規分布の上側確率 α

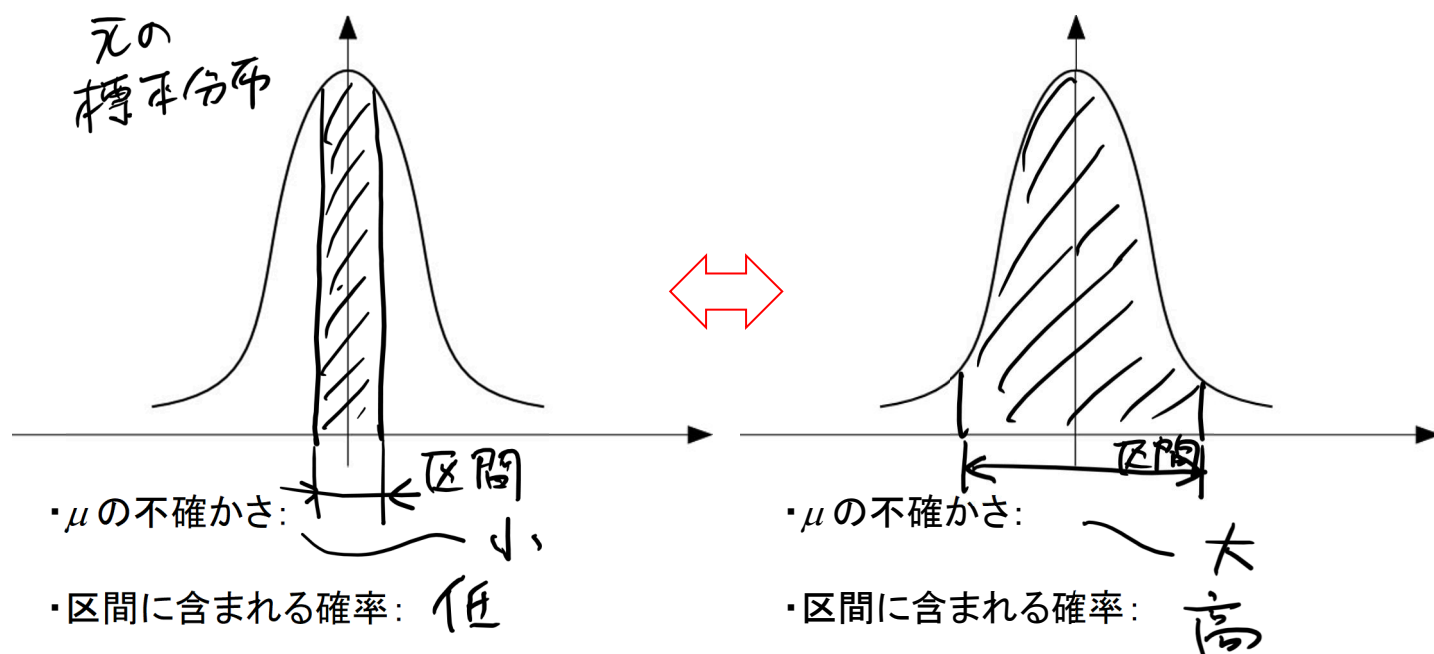
$$\alpha : P(Z \geq z) = \alpha$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0067	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

4.4 母平均の区間推定(母分散 σ^2 が既知の場合)

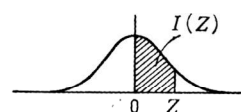
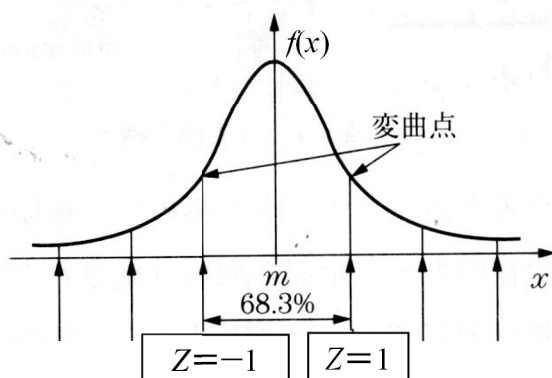
- 母平均が含まれていると推定する「区間」, およびその区間に含まれる「確率」を考慮して推定を行う。



●区間推定方法

- 変数変換 $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ により, 区間を Z の値にて指定する。
元の標本分布に基づくため。

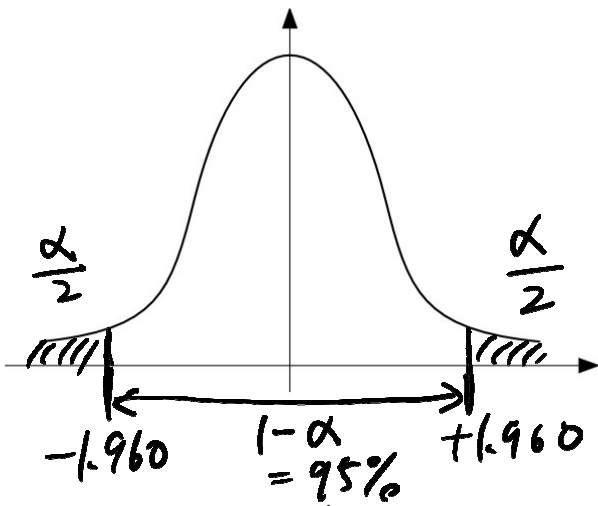
例: $Z = 1$: $I(Z=1) = 0.3413 = 34.13\%$,
 $\therefore P(-1 \leq Z \leq 1) = 0.6826 = 68.26\%$



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
+0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
+0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
+0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
+0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
+0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
+0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
+0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
+0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
+0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3079	0.3106	0.3133
+0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
+1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621

母平均 μ が $-1 \leq Z \leq 1$ の区間に含まれる確率
 $\rightarrow$ 信頼係数 (信頼率、信頼度)

・ 同様に信頼係数 0.95
(95%) のときの $Z=1.960$



$$1 - \alpha = P \left(-Z \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq Z \right) = P \left(\bar{x} - Z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

信頼係数 $1 - \alpha$ 区間推定の幅: $(2 \times) Z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
 による母平均 μ の信頼区間

・例題: ある金属塊の質量を 5 回測定し、以下の結果を得た。測定値は母分散 $\sigma^2 = 3.10$ の正規分布であることが分かっているとき、信頼係数 95% ($Z=1.960$) で母平均 μ の信頼区間を求めよ。

$$x_1 = 89.6 \text{ g}, x_2 = 88.8 \text{ g}, x_3 = 91.3 \text{ g}, x_4 = 78.5 \text{ g}, x_5 = 85.8 \text{ g},$$

$$85.3 \leq \mu \leq 88.3 \text{ g}$$

$$\bar{x} = 86.89, n = 5, \sigma^2 = 3.10, Z = 1.960$$

$$\therefore Z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = Z \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 1.96 \sqrt{\frac{3.10}{5}} = 1.543 \dots = 1.5$$

$$\therefore 85.3 \leq \mu \leq 88.3 \text{ g}$$

4.4 第 4 回講義に関する意見・感想・質問のまとめ

●意見・感想

- ・標本分布では分散が変わることに気をつけたい, 信頼区間について復習する, 復習する, 授業が立て続けにあるのでしっかり復習する, 少しひねくれた問題でも大丈夫なくらい勉強する, 区間推定が少し難しい, 標本平均の分散が σ^2/n になる理由がわからなかった:12
- ・変数変換について理解した, 標本分布と正規分布表についてわかった, 例題が 2 つあって授業内容の理解が進んだ, 母平均の信頼区間の求め方を理解した, 理論を理解すればただの変換に過ぎないことを理解した, 今日の内容は問題なく理解できた, いつもより理解しやすかった, 区間推定の幅の計算を解くことができた, 応用数理 E だとほぼ毎回 $Z=1.960$ を使っていた気がする:11
- ・小テストや最後の例題で解くのに苦戦した, テストになると凡ミスをしてしまいがち, 小テストも授業内容も順調, 小テストで明らかに違う答えが出てきた, 2 の求め方を間違っていて覚えていた, 有効数字を間違わずに解けた, 小テストの有効数字を間違えた気がする, 時間が少し足りなかった, 2 でもっと簡単に解ける方法があったことに気づいた, :11 ←今日の小テストは平均 8.0 点, 満点 28 名でした. 今日はかなり点数が取りやすかったと思いますので, 欠席した人はもったいなかったですね.
- ・区間推定の復習ができてよかった, 応用数理 E でやったものと似ていて理解しやすかった, 何回か学習している内容だが忘れていた部分もあった, 統計の授業をリマインドできてよかった, 実験の考察に実用的な内容, 統計学基礎の講義をおぼろげながら思い出してきた:8
- ・「中心極限定理」は一度習ったが所得のような特殊な分布でもできるのか試してみたい, 母集団に偏りがあっても標本数が多ければ標本分布は正規分布になることはよく考えると当たり前だが驚いた:3
- ・材料評価学で落単してしまったので気を引き締める ←頑張ってください!
- ・確率を求めた例題の答えが自分の感覚よりかなり低くて驚いた ←正直, 私も問題を見ながらそう思いました.
- ・スマートフォンから講義資料を見れないので確認・改善をお願いしたい ←この件に関しては, IT の評価学のときに講義ファイルに書いたし講義で口頭でも説明しましたが・・・やれやれ. 講義ファイルは PC からの閲覧を前提として作成しており(PC で問題が生じないのは毎回確認しています), 一方スマートフォンでの閲覧時にバグって表示されなくなる原因についてはすぐには明らかにできそうにないので, いつまでに改善できるかも約束できません. ですので, 講義ファイルは当面 PC から閲覧してください. そもそも, スマートフォンの小さな画面でいくら拡大したとて見にくいでしょうし, 学習効率が上がるとは思えません.

●質問

- ・正規分布が材料科学 P の研究においてこういった場面で使うのか? ←数回程度の測定であればわざわざ正規分布を使うまでもないのかもしれませんが, 扱うデータ数が桁違いに増えた場合は, 正規分布に基づくデータ解析(分散の評価や区間推定)が必要になると思います.
- ・確率を求める際, Z の値は等号がいるのかいないのか? ←今回の 1 番目の問題で等号をつけなかったのは, 問題文が「2400 円を超える」となっていたため, 「超える=2400 円を含まない」と解釈したからです. これが「2400 円以上」であれば, 以上・以下基準となる値を含む概念ですので $\geq$ とします.

4.5 第3回小テスト解答

ある高校男子生徒 150 人の身長が平均 $\mu=170.4\text{cm}$, 標準偏差 $\sigma=5.7\text{cm}$ の正規分布のときを考える,

Q.1 $\pm 2\sigma$ の範囲となる身長は何 cm 以上何 cm 以下か求めよ. [5 点]

Q.2 $\pm 2\sigma$ の範囲に含まれる人数はおよそ何人か求めよ. [5 点]

A.1 $\mu=170.4\text{cm}$, 標準偏差 $\sigma=5.7\text{cm}$ より,

$$170.4 - 2 \times 5.7 = 159.0$$

$$170.4 + 2 \times 5.7 = 181.8$$

$\therefore$ 159.0 cm 以上 181.8 cm 以下

A.2 まず $\pm 2\sigma$ の範囲に含まれる確率を求める.

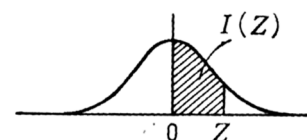
$+2\sigma$ の範囲は標準化正規分布における $0 \sim Z$ ($Z=2.00$) の範囲に相当するため, 正規分布表より $Z=2.00$ における $I(Z)$ を求めると 0.4773

負の範囲も考慮して $0.4773 \times 2 = 0.9546$ ($= 95.46\% \cdots \pm 2\sigma$ の範囲に含まれる確率)

従って範囲に含まれる人数は $150 \times 0.9546 = 143.19$

$\therefore$ およそ 144 人

注: 切り捨て or 四捨五入して「およそ 143 人」とした場合も正解とした.



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
+0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239
+0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636
+0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026
+0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406
+0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772
+0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123
+0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454
+0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764
+0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051
+0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315
+1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554
+1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770
+1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962
+1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131
+1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279
+1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406
+1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515
+1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608
+1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686
+1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750
+2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803