

計測工学 第3回

- 前回：
- 有効数字
 - 数値の丸め方
 - 誤差伝搬の法則



- 今回：
- 測定の不確かさ
 - 正規分布
 - 偏差値

3.1 測定の不確かさ(誤差)

・不確かさ(誤差) = 個々の測定値 - 真の値 知ることはできない

・問い: 誤差を小さくするための具体的方法は?

- ・測定機器の精度を上げる.
- ・測定回数を増やす.
- ・測定者の技能を向上させる.
- ・測定環境を整える.

●誤差の分類

①系統誤差: 測定器固有の誤差(器差), 測定者の癖(個人誤差), 環境条件, 等による

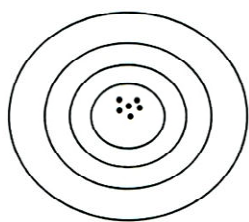
- ・「かたまり」を生じる、「真度」
- ・原因を追求して低減・補正が可能

②偶然誤差: 原因を特定不可能な揺らぎや不確実性に由来する

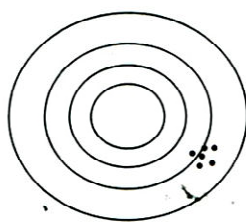
- ・「ばらつき」を生じる、「精度」
- ・低減・補正が困難 → 統計的扱いが必要

③過失誤差: 機器操作の誤り, 等

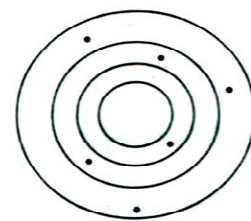
- ・「ばらつき」を生じる
- ・対策は可能



(a) かたより・ばらつきとも小



(b) かたより大・ばらつき小



(c) かたより小・ばらつき大

図 3.1 かたよりとばらつき(イメージ)

●ばらつき(偶然誤差)の特徴

- ・平均値付近の値が測定される頻度: 高い
 - ・" より離れた値が " : 低い
 - ・平均値を中央としたときの左右のばらつき: 同程度
- } 正規分布

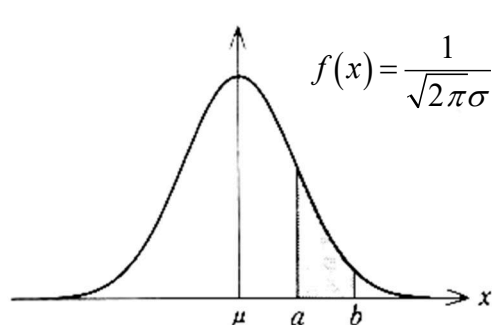


図 3.2 正規分布

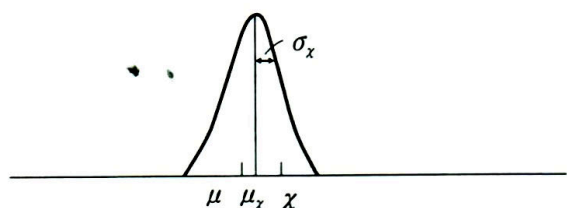
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

X : 確率変数

x : 測定値という値

$f(x)$: 確率密度関数

$a \leq X \leq b$ となる確率: $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$



(a)

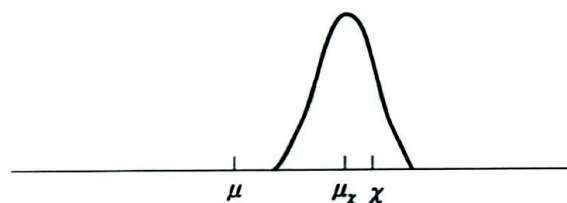
精度

真度

○

○

μ : 正規分布における「平均」

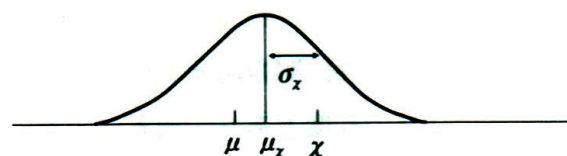


(b)

○

×

σ^2 : " 「分散」



(c)

×

○

σ : " 「標準偏差」

正規分布の表記:

$$N(\mu, \sigma^2)$$

≡ 2 -

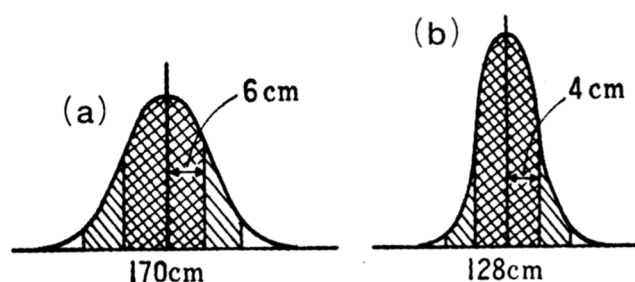
図 3.3 かたよりとばらつき(正規分布)

3.2 正規分布の標準化

● (a) 成年男子の身長分布, $N(170 \text{ cm}, (6 \text{ cm})^2)$

(b) 小学3年男子の身長分布,

$N(128 \text{ cm}, (4 \text{ cm})^2)$ を比較する.



・ 正規分布の性質より...

分布の形状は個々で異なっているが、標準偏差の範囲内に含まれる確率は等しい。

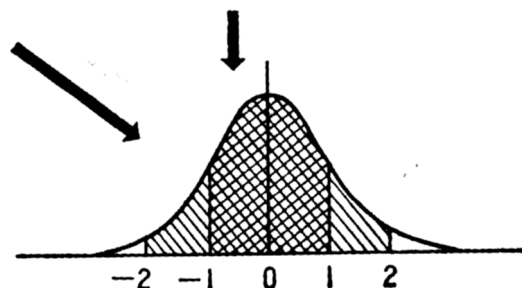


図 3.4 正規分布の標準化

● 個別の正規分布に対して... 変数変換 $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ を行うことで、 $N(\mu, \sigma^2) \rightarrow N(0, 1^2)$ として標準化できる。

- ・ 全ての正規分布を平均0、標準偏差1として扱う。
- ・ 正規分布表を用いて、任意の範囲に含まれる確率を求める (計算不要)。

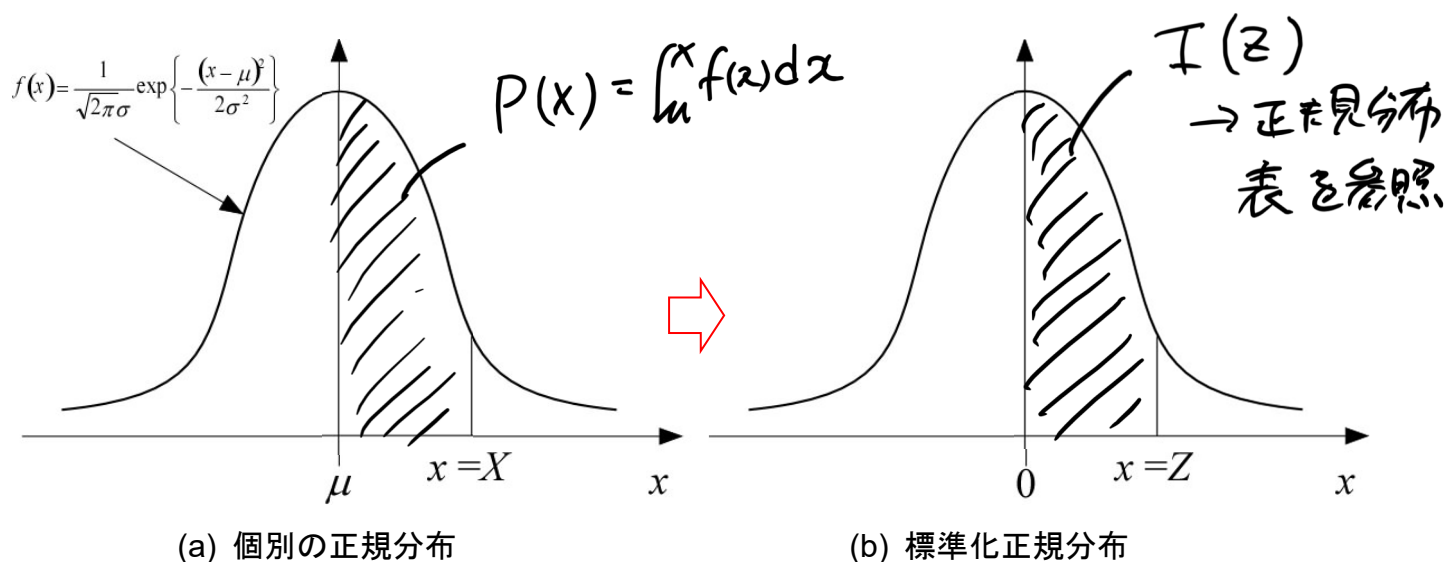


図 3.4 正規分布における確率推定

・正規分布表の使用法

表 3.1 正規分布表

①: その正規分布表が記述して

いる確率 ($I(Z)$ の領域) を確認

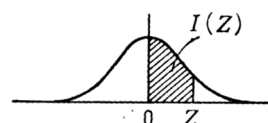
する.

②: 測定値 x に対して変数変換を行い, x に対応する Z の値

を求める.

③: Z の値を縦軸および横軸か

ら選択し, 両軸から該当する

表中の値が確率 $I(Z)$ の値 (= $I(Z)$ の面積) となる.

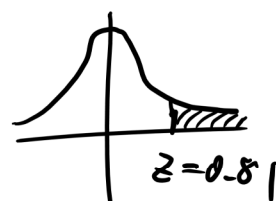
Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
+0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
+0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
+0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
+0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
+0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
+0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
+0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
+0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
+0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3079	0.3106	0.3133
+0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
+1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
+1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
+1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
+1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
+1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
+1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
+1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
+1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
+1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
+1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
+2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
+2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
+2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
+2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
+2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
+2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
+2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
+2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
+2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
+2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
+3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

 $Z = 3.00$

・例題: ある高校3年男子150人の身長が平均 $\mu = 170.4\text{cm}$, 標準偏差 $\sigma = 5.7\text{cm}$ の正規分布を取るとき, 175.0cm 以上の生徒数を求めよ.

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{175.0 - 170.4}{5.7} = 0.81$$

0.80701...

よて $P(X \geq 175)$

$$\begin{aligned}
 &= P(Z \geq 0.81) = P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.81) \\
 &= 0.5 - I(0.81) \\
 &= 0.5 - 0.2910 \\
 &= 0.2090
 \end{aligned}$$

$$\therefore 150 \text{人} \times 0.2090 = 31.35 \div 32 \text{人}$$

3.3 標準化正規分布における標準偏差

- 標準化した正規分布 $N(0, 1^2)$ において、分布の形状は全て同一である

- 標準偏差 $\sigma=1$ を基準とした範囲の表言として、それに対応する確率は図3.5のように表わされる。
(正規分布表で確認可能)

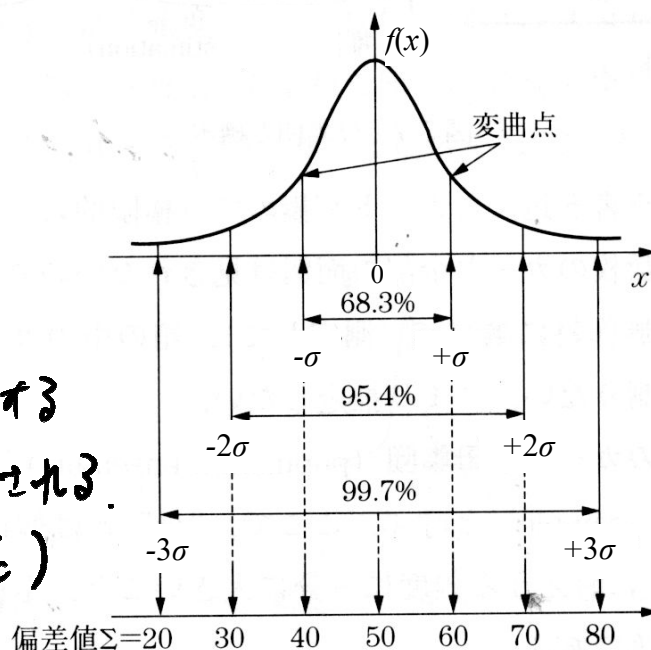


図 3.5 標準化後の標準偏差

- 例題: 標準化された正規分布において、 $\pm 3\sigma$ ($-3\sigma \sim +3\sigma$ の範囲内) に含まれる確率は何%となるか、表 3.1 の正規分布表を用いて求めよ。

$$z=3.00 \text{ のときの } I(z) = 0.49865$$

正規分布は左右対称のため、

$$\pm 3\sigma \text{ で取れば } 0.49865 \times 2 = 0.9973 \\ = \underline{\underline{99.73\%}}$$



3.4 第3回講義に関する意見・感想・質問のまとめ

●意見・感想

- ・正規分布表の使い方を復習できてよかった, 良い復習になった, 誤差の種類など他の科目で学習したことを再度学べてよかった, 受験ぶりに標準偏差を学習した, 正規分布表を用いた計算の良い復習になった, 2年時やった内容を久しぶりに思い出した, :19
- ・1つ目の例題で標準正規分布と間違えてしまった, 人数を求めた時の少数の処理が厄介, 標準偏差は忘れていた, 例題が自力で解けなかった, 表の読み取り方を忘れていたので復習する, 正規分布表のどの部分に対応しているかミスしないようにする, 確率の話はあまり覚えていなかったので復習する, データの取り扱い方が苦手だったのでしっかり理解する:18←意外と忘れてる人が毎年多いので, 復習としてやる意味はあるのかなと思っています.
- ・正規分布の見方を理解できた, 数学の基礎的な部分が多かったので理解しやすかった, 目新しい内容がないのでスムーズに理解できた, 復習的な内容だったのでまだできる, 図形を使うことが楽に求められるコツだと思った:17
- ・小テストで有効数字を間違えてしまったかもしれない, しっかり余裕を持って小テストを解けるようにする, 小テストの2問目を解けなかった, 勉強した成果を出せた, 小テストの単位換算を間違えたのは致命的, ルート内の2乗を忘れていた, 小テストを間違えて暗い気持ちになった:10←今回の小テストは, 平均7.8点, 満点13名でした. 2問目まで完璧に解けた人はあまりおらず, 関数の把握や有効数字としての取り扱いの間違いが多かったです.
- ・今週の水曜に補講があるがその1つの講義のためだけに大学に来るのが少し億劫←大学内でレポートを書くとか, 他にやることを見つけてみれば?
- ・将来研究する際に系統誤差を低減したり偶然誤差の統計処理が正しく行えるようにしたい←よりよく理解することが必要ですね.
- ・今日寝てしまったので帰ってから自主学習する←頑張ってください!
- ・評価学と違って現実に活かすことがイメージしづらい←でも, 測定はどんな科目でもやるでしょうからむしろ身近では?
- ・変数変換によって $\mu=0$, $\sigma^2=1$ と扱うことができるところに感銘を受けた←便利ですね.

●質問

- ・誤差を小さくする方法として計量の際なるべく1回で計り取るようにするのは有効か?←1つの測定(計測)対象を, それより小さい単位に分けて複数回で計量するのは避けた方がよいのは確かですが, 統計的処理のために1回の完全な測定を複数回行うのは必要となります.
- ・確率に有効数字は関係ないのか? Zの値で誤差も出ているのでその大小で決める方がいいのか全体の範囲が大きい場合もっと上の桁から変わってしまう可能性もあり正確性に欠ける?←この辺は私も正直悩ましいところです. 測定に基づく計算はあくまで有効数字の考え方に従うべきですが, そこに数学的理論(統計的処理)が入ってきた場合, 具体的にどのように処理するべきかは正直曖昧な部分があります.
- ・小テストで光速の値は物理定数なので誤差なしと考えたが合っているか不安←お考えの通り, 今回の関数は $f(x) = Cx_1$ ($x_1 = t$)であり, Cは定数であり変数ではありません. ある程度の人数が $f(x) = x_1 \cdot x_2$ と書いていましたので減点しました.

3.5 第2回小テスト解答

Q.1 誤差伝播の法則に基づき、以下に示す誤差 Δq の式を完成させよ。[6 点]

$$\Delta q = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \boxed{(1)} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 \right)^{\boxed{(2)}} + \dots + \left(\boxed{(3)} \cdot \Delta x_n \right)^2}$$

A1. (1) Δx_1 (2) 2 (3) $\frac{\partial f}{\partial x_n}$

Q.2 光が位置 A から位置 B に到達するまでの時間が $2.0 \pm 0.1 \text{ ns}$ であった。誤差伝播の法則に基づき、AB 間の距離を誤差も含めて表せ。ただし光速 $c = 299792458 \text{ m/s}$ とする。

A.2 Q.1 で導出した誤差 Δq は次式で表される。
$$\Delta q = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \right)^2}$$

また関数の形式 $q = A \cdot x_1$, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = A = c$, $x_1 = t$, $\Delta x_1 = \Delta t$ より, $\Delta q = \pm \sqrt{(c \cdot \Delta t)^2}$ である。

ここで $c = 299792458 \text{ m/s}$, $t = 2.0 \text{ ns} = 2.0 \times 10^{-9} \text{ s}$, $\Delta t = 0.1 \text{ ns} = 0.1 \times 10^{-9} \text{ s}$

$\therefore \Delta q = \pm \sqrt{(299792458 \times 0.1 \times 10^{-9})^2} = \pm 0.029979 \dots = \pm 0.03 \text{ m}$ ← 誤差を表す値は一桁

$q = ct = 299792458 \times 2.0 \times 10^{-9} = 0.59958 \dots = 0.60 \text{ m}$ ← 有効数字 2 桁

AB 間の距離 $q \pm \Delta q = 0.60 \pm 0.03 \text{ m}$