

計測工学 第2回

- 前回：
- ・ 授業ガイダンス
 - ・ SI について
 - ・ 工学単位系



- 今回：
- ・ 有効数字の復習（続き）
 - ・ 数値の丸め方
 - ・ 誤差伝搬の法則

本日(6/16)

13:00～シェイクアウト訓練
終了後から小テスト開始

2.1 有効数字

- ・例題: 元の直径 $d_0=10.00\text{mm}$ の S50C 丸棒 2 本にそれぞれ焼入れおよび焼鈍しを施した上で引張試験を行ったところ, 試験後の d_1 は 9.97mm (焼入れ) および 8.63mm (焼鈍し) だった.
- 機械的特性値のひとつである「絞り」の定義式 $\phi = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \times 100 = \left(1 - \frac{A_1}{A_0}\right) \times 100 [\%]$ に基づき, それぞれの絞りを求めよ.

$$\phi_{\text{焼入れ}} = \underline{0.6\%}$$

$$\phi_{\text{焼鈍し}} = \underline{25.5\%}$$

2.2 数値の丸め方 (JIS Z 8401)

- これまで: 原則として四捨五入 → 厳密に言う, 四捨五入では処理後の数値が高めにシフトする恐れあり.

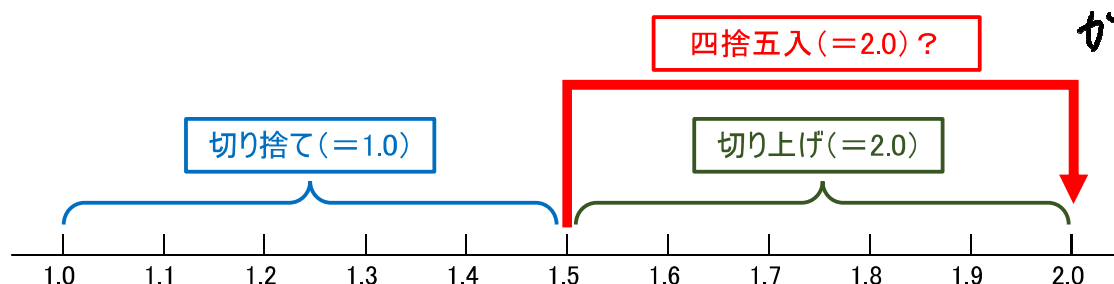
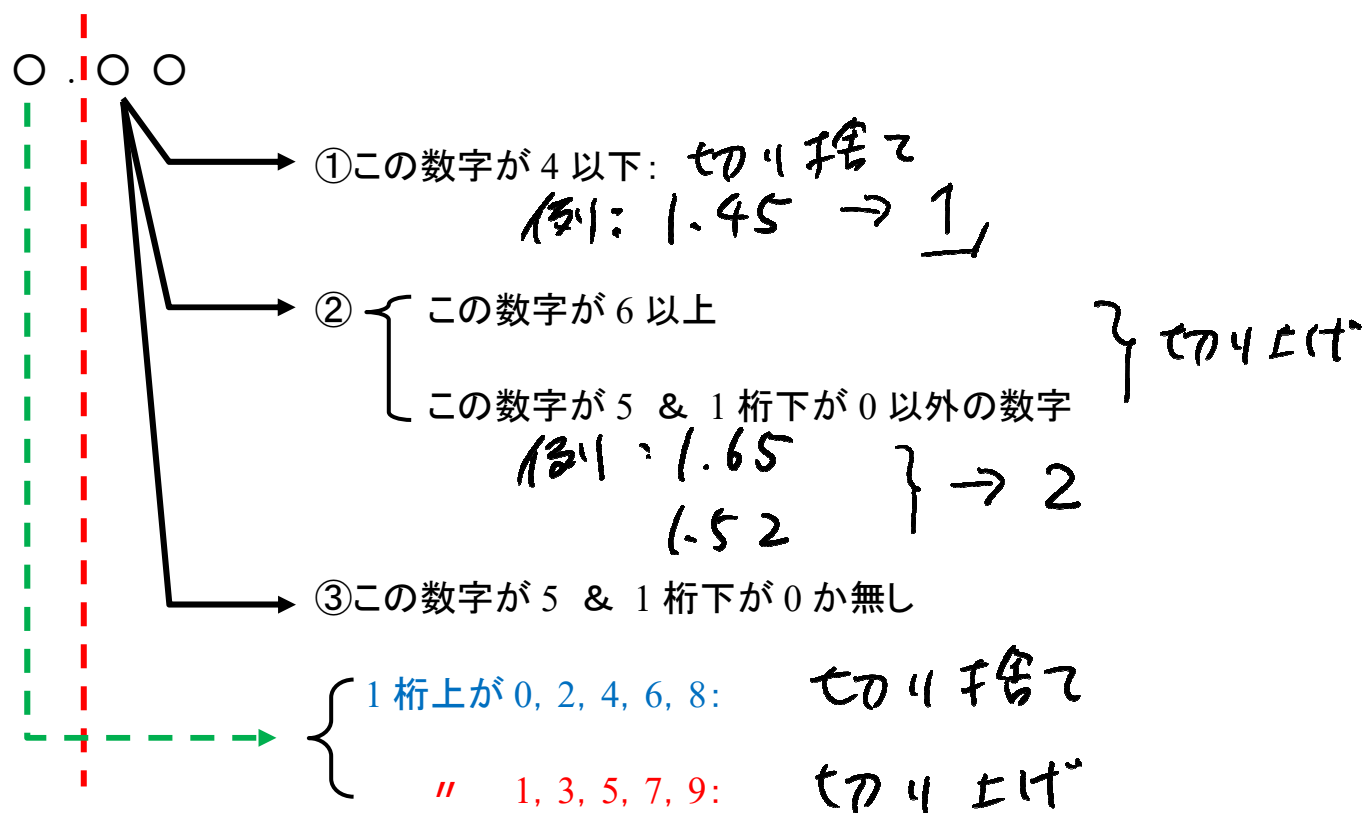


図 2.1 四捨五入の考え方

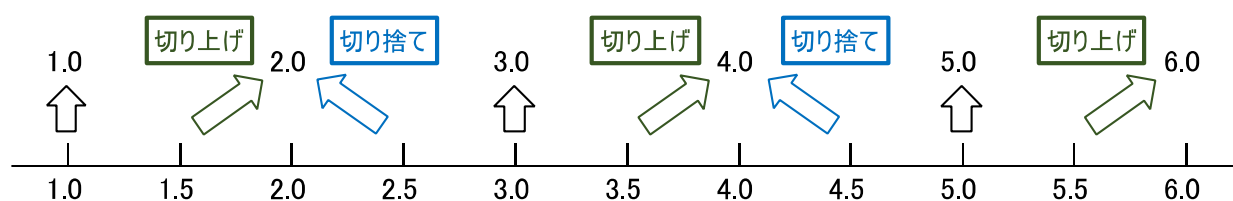
●JIS Z8401 で規定された丸め方:

例:ある測定値を1の位に丸める場合



丸めた数値が
常に偶数になる
ような処理

例: 2.50 → 2
1.50 → 2



例題: 次の数値を小数第1位で丸めよ.

(1) 12.223

(2) 12.250

(3) 12.550

12.2 / ①

12.2 / ③ 切り捨て

12.6 / ③ 切り上げ

2.2 誤差伝播の法則

- ・ 直接測定: 測定量と同種類の基準量と比較して測定する事。(例: 定規による長さの測定)
 ⇒ 測定結果と誤差が直接関連づけられる.

- ・ 間接測定: 測定値を、関連する複数の直接測定値から計算により求める事.

(例: 密度測定 = 質量 / 長さ³)

- ⇒ 間接測定の誤差は、個々の直接測定値における誤差の影響により決まる.



- ・ 誤差伝播の法則: 間接測定値 q が個々の独立した直接測定値 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ より求められるものとし, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ がそれぞれ $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_n$ の誤差を持つとき, 間接測定値 q の誤差 Δq は次式で表される.

$$\Delta q = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2}$$

- ある長方形の土地の面積を求めるため、縦と横の長さを異なる方法で測ったところ、以下の測定結果を得た.

直接測定

・ 縦: 15m, 誤差 1m 単位

→ $15 \pm 1m$

$x_1 = 15m, \Delta x_1 = 1m$

・ 横: 5.8m, 誤差 0.1m 単位

→ $5.8 \pm 0.1m$

$x_2 = 5.8m, \Delta x_2 = 0.1m$

間接測定

面積 $q = f(x_1, x_2) = x_1 \times x_2$

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 = 5.8, \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 = 15$

$$\therefore \Delta q = \pm \sqrt{(5.8 \times 1)^2 + (15 \times 0.1)^2} = \pm 5.9908 \dots = \pm 6 m^2$$

注: 不確かさを表す数字は 1 桁のみであり,

それは間接測定値の計算結果における

最小値である.

$$q = 15 \times 5.8 = 87 \text{ m}^2$$

不確かさもある

$$\Delta q = \pm 6 \text{ m}^2$$

$$\therefore q \pm \Delta q = 87 \pm 6 \text{ m}^2 \quad \text{桁: 1 の位}$$

・例題: 異なる試薬 I および II を混合する際, 試薬 I が $21 \pm 2\text{g}$, 試薬 II が $14 \pm 3\text{g}$ であった.

誤差伝播の法則に基づき, 合計の質量を誤差も含めて表せ.

$$q = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad x_1 = 21\text{g}, \quad \Delta x_1 = 2\text{g}$$

$$x_2 = 14\text{g}, \quad \Delta x_2 = 3\text{g}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 1$$

$$q = 21 + 14 = 35\text{g}$$

$$\Delta q = \pm \sqrt{(1 \times 2)^2 + (1 \times 3)^2}$$

$$= \pm 3.605 \dots = \pm 4\text{g}$$

$$\therefore q = 35 \pm 4\text{g}$$

・例題: ある円筒形物体の寸法を測定したところ, 高さ $6.54 \pm 0.02\text{ cm}$, 直径 $1.43 \pm 0.01\text{ cm}$

であった. 誤差伝播の考え方に基づき, 誤差を考慮したこの物体の体積 $V [\text{cm}^3]$ を求めよ.

$$q = \frac{\pi d^2}{4} \cdot h$$

$$= \frac{\pi x_2^2}{4} \cdot x_1$$

$$= \frac{\pi (1.43)^2}{4} \cdot 6.54$$

$$= 10.5036 \dots$$

$$= 10.5 \text{ cm}^3$$

$$x_1 = h = 6.54 \text{ cm}, \quad \Delta x_1 = 0.02 \text{ cm}$$

$$x_2 = d = 1.43 \text{ cm}, \quad \Delta x_2 = 0.01 \text{ cm}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\pi x_2^2}{4} = 1.6060 \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\pi (2x_2)}{4} \cdot x_1 = \frac{\pi x_1 x_2}{2} = 17.6904 \dots$$

$$\begin{aligned}\Delta q &= \pm \sqrt{(1.6060 \times 0.02)^2 + (19.6904 \times 0.01)^2} \\ &= \pm 0.15037 \dots \\ &= \pm 0.2\end{aligned}$$

$$\therefore q = \underline{10.5 \pm 0.2 \text{ cm}^3}$$

2.3 第2回講義に関する意見・感想・質問のまとめ

●意見・感想

- ・誤差の伝搬についてしっかり理解できた, 誤差の計算を久しぶりに復習できた, 誤差の伝播は実験なので用いられるため完璧にしておく, 誤差伝播についてあまり理論を理解しないで使っていた, 関数をどう取るのかの問題であるかということに気づいた, 誤算の考え方を他人にも教えられるようになりたい, Δq の有効数字の判断が難しいと感じた, 実験などにも活かしたい, 誤差伝播の有効数字に気をつけたい, 誤差伝播の法則は去年の実験でやったが忘れていた, 最後の例題で変数の与え方を注意する:24←コメントにあったようにまさに「関数をどう取るのか」の問題なんです.
- ・切り上げや切り捨ての話は過去にやったのに忘れていた, 分析科学の授業を思い出しいい復習になった, 数値の切り上げ・切り捨てが昨年より理解できた, 丸めについてよくわかった, 丸めるの面白かった, ③の丸めは意識してこなかった, 実験にも応用する, 「で丸める」と「に丸める」で違う気がする:13←確かに「で丸める」と「に丸める」では意味が違いますよね.
- ・小テストの水銀柱の問題は久しぶりに解いたためかなり難しく感じた, 小テストできて良かった, 小テストを通して単位で考えることの大切さを理解した, 小テストでミスった, 水銀の問題が出ると聞いて水を含んだ問題を勉強してきたが出てこなくて悲しい, 高校時代やったが全然できなかった, 勉強することないと油断してしまった:10←今回の小テストは平均 5.9 点, 満点 15 名でした. 「水銀柱の問題」から「水を含んだ問題」を連想するのはさすがに飛躍しすぎです.
- ・意外とやってみるとできないので復習する, しっかり復習する, 単位系について復習する, 丸めと誤差伝播を法則を整理する:7
- ・よく理解できた, 分かりやすかった:2
- ・挙手で挽回する←頑張ってください!
- ・最後また単位換算を忘れてしまった←慣れるしかないですね.
- ・今回のプリントの最初は前回の最後でやった←そうでしたね, 印刷した授業プリントの内容がずれていたようです.
- ・不確かさを表す桁が 1 桁のみであることがわかった←有効数字の考え方と関連づけて考えれば理解しやすいと思います.
- ・小テストの復習をしたいので返却して欲しい←小テストも成績の根拠書類の一つですので, 5 年間の保管が必要なため返却できません. というか, 自分の解答内容は覚えているでしょ?

●質問

- ・ $\left(1 - \frac{A_1}{A_0}\right) \times 100 [\%]$ を使ったら有効数字 3 桁になるのに $\left(\frac{A_0 - A_1}{A_0}\right) \times 100 [\%]$ だと有効数字 1 桁になるのはどうなの? ←前者の場合も, $\frac{A_1}{A_0}$ の結果が 0.994009 となり割り算ですので A_1 の桁数 (3 桁) に準じて有効桁数 3 桁として 0.994, それを 1 から引いて 0.006 (引き算なので位取りを合わせるため小数第 3 位に合わせる), 100 をかけても結局 0.6% (1 桁) となり後者と同じですよ.
- ・例題 (誤差伝播) の足し算でなぜ偏微分が 1 になるのかがわからなかった← x を x で微分したら何になりますか?
- ・有効数字の桁数により間接測定値よりも小さな誤差になった場合の表し方はどうなるのか? ←多分, ということは起こらないはずなんです, 無理やり四捨五入して桁を上げるとかでしょうか.
- ・最後の例題の偏微分の部分の計算を 3 桁に揃えて与えても大丈夫か? ←大丈夫です.

- ・(4桁—3桁)／3桁だから3桁では？←いまだに有効数字の計算の理屈をわかってないようですね。そういう、どんな計算も桁数のみで決まるものではないんですよ。 $\left(\frac{100.0-99.4}{100.0}\right) \times 100 [\%]$ の分子部分の計算結果は0.6ですよ！引き算は桁数ではなく「最小桁の位取り」を揃えなければならないこと、また桁落ちに注意しなければならないこと、を何度説明すれば理解してもらえるのでしょうか……

2.4 第1回小テスト解答

Q.1 SI 単位系における力の単位と読みを示せ. [4 点]

A.1 N, ニュートン

Q.2 大気の圧力を水銀柱で測ると 715.0 mm であった. これは何 hPa に相当するか.
(水銀の密度 $\rho = 13.55 \text{ g/cm}^3$, 重力加速度 $g = 9.807 \text{ m/s}^2$ として) [6 点, 部分点あり]

A.2 水銀柱の内径 $r = 1.000 \text{ cm}$ と仮定する. また $715.0 \text{ mm} = 71.50 \text{ cm}$

水銀柱内の水銀の体積 $V[\text{cm}^3] = \pi r^2 \times \text{高さ } h = \pi \times 1.000^2 \times 71.50 = 71.50 \pi$

水銀柱内の水銀の質量 $m[\text{kg}] = V \times \text{密度 } \rho = 71.50 \pi \times 13.55 = 968.825 \pi \text{ [g]} = 968.8 \pi \times 10^{-3}$

// の水銀の重量 $W[\text{N}] = m \times \text{重力加速度 } g = 968.8 \pi \times 10^{-3} \times 9.807 = 9501.02 \pi \times 10^{-3}$
 $= 9501 \pi \times 10^{-3}$

水銀柱の底面積 $A[\text{m}^2] = \pi r^2 = \pi \times (1.000 \times 10^{-2})^2 = 1.000 \pi \times 10^{-4}$

水銀柱の圧力 $P[\text{Pa} = \text{N/m}^2] = 9501 \pi \times 10^{-3} / 1.000 \pi \times 10^{-4} = 9.501 \times 10^4 \text{ N/m}^2 = 950.1 \text{ hPa}$