材料評価学　第 6 回

前回：　引張試験における

・理想破壊強度
・破壊強度と表面エネルギー
・強度を低下させる因子

今回：　引張試験における

・応力集中
・Griffith の破壊モデル
・弾性ひずみエネルギー

6. 引張試験 5

6.1 応力集中

●「応力集中」とは？

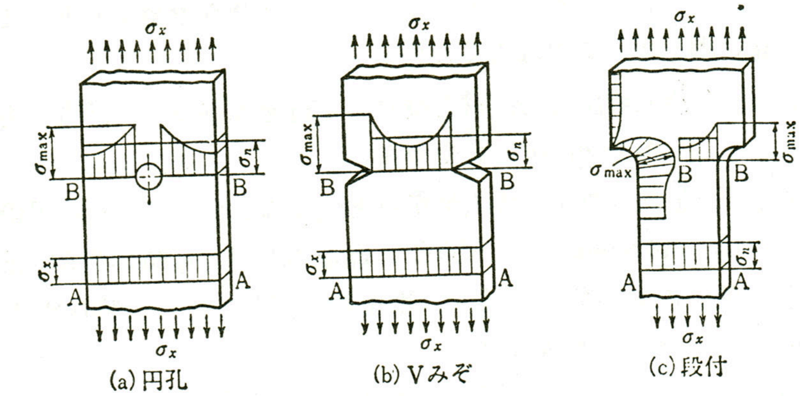


図 6.1 切欠き

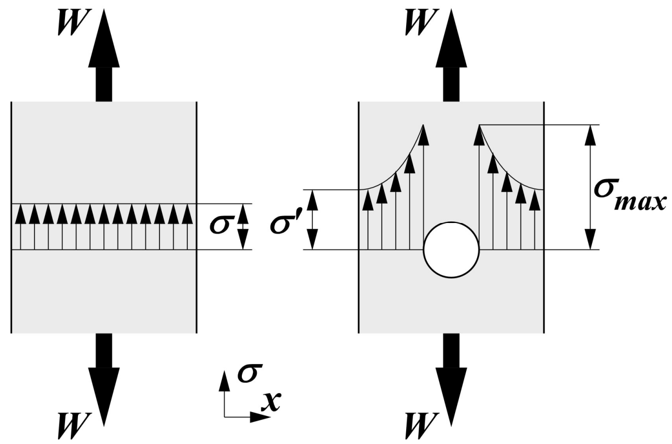


図 6.2 応力集中の概念

・形状が一様な材料中の応力：均一
（これまで扱ってきた問題の前提条件）

・形状が一様ではない部分（例：穴、みぞ… 総称して「切欠き」）

→ 断面積の減少に伴い、平均的応力も上昇

→ 切欠き部近傍における特異的応力上昇：「応力集中」

●応力集中係数： $\alpha = \dfrac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$ σ_{max}：切欠き近傍の最大応力
σ_n：〃 部断面積から求めた公称応力

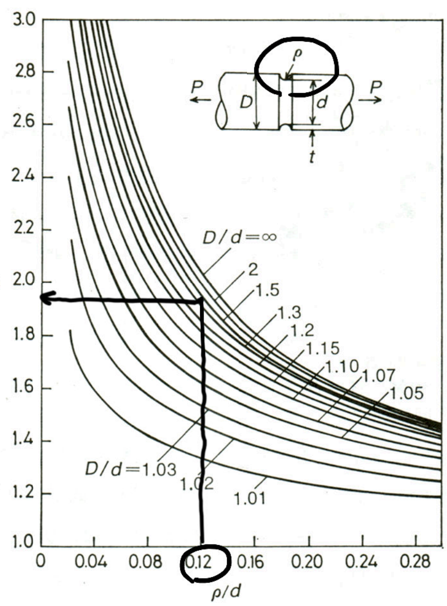
・負荷形式が同じならば、部材形状により定まる（相似則が成り立つ）

例題：D＝15.0 mm, d＝10.0 mm で引張負荷 W＝100.0 kgf を受ける段付き丸棒に ρ＝1.20 mm の切欠きがある場合，切欠き近傍での最大応力 σ_{max} を求めよ．

$\rho = 1.20$ mm

25.6 MPa

$\alpha = 2.05$



（続き）

$D/d = 1.50$, $\rho/d = 0.120$ より $\alpha \fallingdotseq 1.95$

$\sigma_n = \dfrac{4W}{\pi d^2}$, $W = 100.0\,\mathrm{kgf} = 100.0 \times 9.807\,\mathrm{N}$

$$\sigma_{max} = \alpha \cdot \sigma_n = 1.95 \cdot \frac{4 \cdot 100.0 \times 9.807}{\pi\, 10.0^2} = 24.348\ldots = \underline{24.3\,\mathrm{MPa}}$$

6.2　Griffith の破壊モデル

● 「き裂」とは？： 切欠きの先端曲率半径が0とみなせるもの.

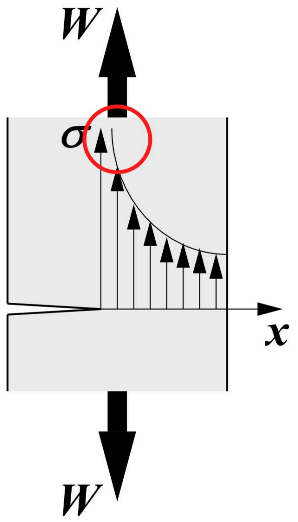


図 6.4　き裂

き裂先端の応力：無限大まで上昇する

応力基準の考え方は適用できない

・き裂を有する部材の破壊強度をどう取り扱うか？ → Griffith の破壊モデル

●Griffith の破壊モデル

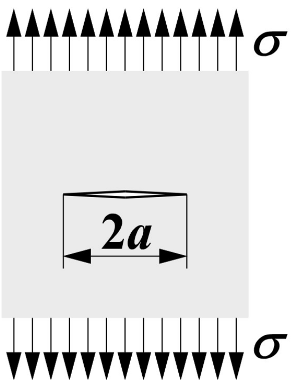


図 6.5　Griffith の破壊モデル

仮定：・長さ 2a のき裂を有する無限平板

・部材が完全ぜい性体（塑性変形しない）

き裂と部材の寸法の差が十分大きい

・き裂に垂直に一様応力 σ をうける

・部材厚さは単位厚さ（＝1）

●弾性ひずみエネルギー： 弾性変形（＝外力による可逆的な仕事）により材料内に蓄えられるエネルギー

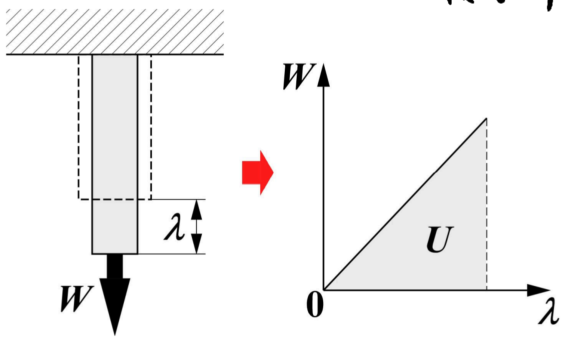


図 6.6　弾性ひずみエネルギー

・外力による仕事　$U=\int W d\lambda$, $W=k\lambda$ より

$$= \int k\lambda \, d\lambda = \frac{k\lambda^2}{2}$$

・外力による仕事を応力とひずみで表す

$$U = Al \cdot u, \quad u = \int \sigma \, d\varepsilon = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}$$

$\sigma = E\varepsilon$ より

$$= \frac{E\varepsilon^2}{2}$$

u：単位体積あたりの弾性ひずみエネルギー

●き裂を有する部材における弾性ひずみエネルギー：

き裂長さに依存する。

・き裂長さ大の方が変形しやすい＝蓄えられるエネルギーが少ない

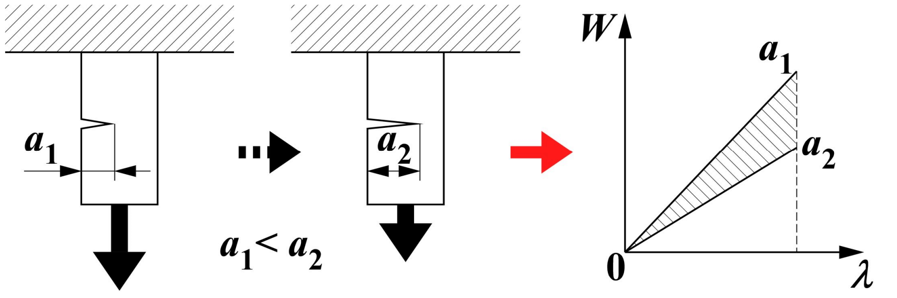


図 6.7　き裂材における弾性ひずみエネルギー

・き裂長さ a_1 の部材に負荷をかけ、き裂が進展して a_2 になると、蓄えきれなくなった弾性ひずみエネルギー（上右図斜線部分）が解放される。

● 解放される弾性ひずみエネルギー ≧ き裂形成に必要な表面エネルギー

$$\frac{dU}{da} \geqq \frac{dT}{da}$$

が成り立てば き裂が進展する。

破壊に至る

●解放される弾性ひずみエネルギーの増分：$\dfrac{dU}{da}$

$$u=\frac{\sigma^2}{2E},\quad U=u\times \underbrace{2\pi a^2}_{}$$

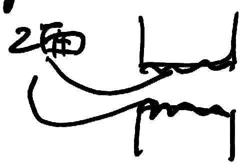
エネルギーが
解放される面積
($2\pi a^2\times$ 単位厚さ(1)により体積)

$$\longrightarrow \frac{dU}{da}=\frac{2\pi a\sigma^2}{E}$$

●き裂進展に必要な表面エネルギーの増分：$\dfrac{dT}{da}$

T：表面エネルギー
γ：単位面積あたりのT

$$T=\underbrace{2a}_{\text{き裂長さ}}\times\gamma\times\underbrace{2}_{}=4a\gamma$$



$$\therefore\ \frac{dT}{da}=4\gamma$$

$$\frac{2\pi a\sigma^2}{E}\geqq 4\gamma \longrightarrow \left(a\geqq\frac{2\gamma E}{\pi\sigma^2}\right)$$

$$\sigma\geqq\sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi a}}\qquad 2a\geqq\frac{4\gamma E}{\pi\sigma^2}$$

例題：ぜい性体である溶融石英（γ = 4.30 J/m^2, E = 70.0 GPa）で 2a＝0.100 mm のき裂が含まれている場合，ぜい性破壊する応力を求めると？また組織を改善することでき裂寸法を 2a＝0.0100 mm まで小さくした場合，破壊応力はどの程度上昇するか求めよ.

$$2a=0.100\,\mathrm{mm}\rightarrow a=\frac{0.100}{2}\,\mathrm{mm}=\frac{0.100}{2}\times10^{-3}\,\mathrm{m},\quad \gamma=4.30\,\mathrm{J/m^2}=4.30\,\mathrm{N/m}$$

$$E=70.0\,\mathrm{GPa}=70.0\times10^{9}\,\mathrm{N/m^2}$$

$$\therefore\ \sigma\geqq\sqrt{\frac{2\times4.30\times70.0\times10^{9}}{\pi\times\frac{0.100}{2}\times10^{-3}}}=6.1906\ldots\times10^{7}\,\mathrm{N/m^2}=61.9\,\mathrm{MPa}$$

<u>61.9 MPa 以上で破壊する.</u>

• 2a = 0.0100 mm の場合：<u>196 MPa 以上</u>

6.3　第 6 回講義に関する意見・感想・質問のまとめ

●意見

・ひずみエネルギーについてよく復習する，小テストに向けて復習する，計算だけでなく語句も意識して復習する，忘れないように復習する，しっかり自力で解けるように勉強する，語句が増えてきたので意味を見直す，覚えることが多すぎるから整理する，例題をしっかり復習する，破壊モデルを復習する，一通り復習する，復習がまだ足りていない，微積によってしきを導出することが増えてきたので 1 つずつ理解する，1/3 が終わったので週末で復習する，エネルギーの計算過程が複雑だったので手順を理解するよう復習する：20

・例題で簡単なところでミスしてしまった，自力で計算できなかったので家で解き直す，最後の計算問題が全部できた，例題によって解き方が理解できた，例題も自力で解けた，単位変換に苦戦した，どこの長さを何でおいたか分からなくなりそうなので最初にまとめて書いておく，σ や ε の求め方をわかっていると例題もスムーズに解ける，有効数字の間違いを無くしたい，応力集中係数から最大応力を正確に求められた：12←今回の最初の例題をよく理解しておけば応用的な問題にも対応できるかと思います．

・小テストの語句問題が解けなかった，小テストがかなり不安，あと少し勉強し解けばというのが増えてる，全てを解答できなかった，語句の穴埋めじゃなくても点数が取れるように頑張る，勉強したつもりだったが小テストができなかった，計算ではなく語句の問題になると歯が立たないことを知った，語句の問題が出ると言われていたので対策できた，満点取れなかった：12←今回の小テストは，平均 5.9 点，満点 11 名でした．前回より満点の人数は減りましたが，平均点はむしろ上がりましたのでやはり語句の問題の方が点数は取りやすいでしょう．ここでも低い点数の人（0 点 1 名，1 点・2 点各 2 名）はかなりきついですね．

・表面エネルギーという概念について学んだ，応力集中と関連して切欠きやき裂の考え方が大切，き裂によりエネルギーがどう変化するかを理解できた，弾性ひずみエネルギーは考え方がイメージ通りでわかりやすかった，破壊に至るまでのエネルギーを式を通して得られることに驚いた，全て応力基準が使えるわけではないことがわかった，計算結果が間隔と一致していて理解しやすかった：7←「表面エネルギー」はこれまでに他の講義でも出てきてる気がしますが．

・応力集中についてよく理解できた，読み取りの問題面白い，グラフの線が細かいので焦って解くとミスしそう，読み取りがずれると計算結果が大きくずれてしまう，き裂があると応力が集中するのはイメージしやすい：7←授業中にも言いましたが，読み取りを含む問題の場合は解答の絶対値のずれは気にしません．適切な手順・方法で解答されていれば正解とします．

・とてもわかりやすい講義だった，スライドも含めてわかりやすかった，問題なく理解できた，スクリーンが 2 つあるので見逃してもメモできた：3

・3 年生になってより現実的なき裂や穴や溝を考えられて面白い，切欠きという考えが追加されより現実問題としてあり得そうな設定になった：3

・「弾性ひずみエネルギーが解放される」という表現に違和感があった，a1 と a2 のグラフの差のエネルギーはどこに行くのかと思ったがき裂形成に使われるとわかって納得した：2

・応力集中について具体的に知ることができたので応力集中しにくい切欠きについて調べてみたい←本講義の最終回で，コンピューターによる応力解析の話をするのですがそこで応力集中の度合いについての解析結果を示します．結論から言うと，今日も話しましたが応力集中部の形状（例えば角部を丸めるだけで応力集中の度合いは減少します）が重要です．

・途中で少し置いていかれてしまった

・ネットで調べると我々が普段使う「亀裂」と授業の「き裂」は厳密には異なることを知った←生成 AI 的にはそのように記載されていますが，実際はそこまでニュアンスが違うわけではありません．そもそもは「亀」

の字が常用漢字外であったことから「き」のみをひらがなにしていたものですが，2010 年から常用漢字になったことから「亀裂」という表記にしようという意見もあります（材料工学的には今でも「き裂」が一般的ですが，他の分野では「亀裂」表記のところもあります）.

●質問

・へき開やき裂のように一部ひらがな表記があるのはなぜか？:2←上記と同様です.

・欠陥と切欠きは同じような意味で取り扱うのか？←「欠陥」の方が幅広い概念ですね.「切欠き」は欠陥の一形態です.

・授業中の動画を公開して自宅でも視聴できるようにできないか？←わかりました，授業ファイルのページにリンクしておきます.

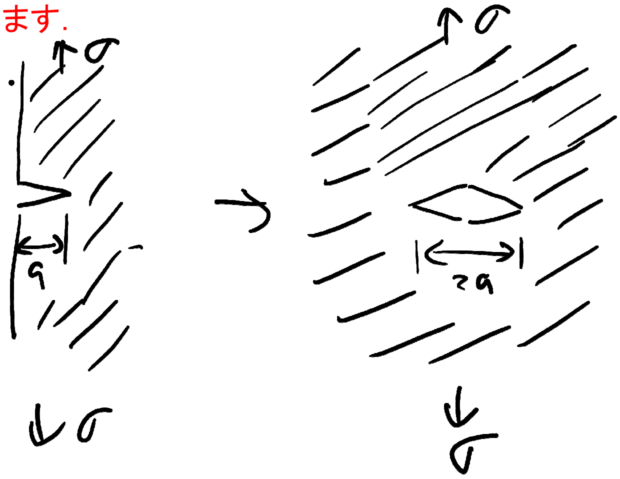
・Cu，Ag，Au ってメダルとかに使われるが材料として理にかなっているのか？←これについて，私はこれまで考えたことがありませんでした. ネットで調べると，「古代ギリシャからの伝統」「貴金属性」「錆びにくさや地上での存在比」といった観点から決まった，という記述がありました.

・例題でσnを求めるときに d を使ったのはなぜか（これまでは元の直径を使っていた）？←授業でも説明したように，切欠き部の公称応力を求める際は「切欠き部断面積」を使って求めるからです.

・P3 の $u=\int \sigma d\varepsilon = \sigma\varepsilon/2$ は合っているのか？←この式は，積分の結果として求まったわけではなく，図 6.6 の W-λプロットをσ-εプロットと置き換えて，そこで定義される単位堆積あたりのエネルギーu はプロットの三角形の面積と同等であることから求めたものです.

・き裂と円孔の境界はどの程度の先端曲率半径なのか？←破壊力学（Griffith の破壊モデルのように，材料破壊現象を応力基準ではない取り扱いをする学問分野）においては，原子面間隔を曲率半径の下限値としているようです.

・Griffith の破壊モデルでき裂長さは a ではなく 2a なのはなぜか？←き裂のモデルとして，下図のような片側き裂（部材の端面から導入されているき裂）については「き裂長さ: a」と定義されています. このモデルを，端面を軸対象として拡張することで無限平板がモデル化されているため，無限平板のき裂長さは「2a」となっています.



6.4　第 5 回小テスト解答

Q.1　次の文章の空欄に当てはまる語句を記入せよ．[②～④各 2 点，その他各 1 点]

へき開型破壊とは，面間距離が大きい特定の面（＝へき開面）に沿って，垂直に原子が分離するような破壊形態であり，微視的[①]破壊である．

一方，[②]型破壊とは，[③]面に沿った原子の移動（＝[④]変形）の進行の結果，破壊に至る形態であり，微視的延性破壊である．

理想へき開破壊強度σ_{th}，および理想せん断破壊強度τ_{th}の比[⑤]から，Cu･Ag･Au 等の[⑥]結晶構造を有する金属ではへき開破壊が[⑦]事が分かる．

A.1

①[ぜい性]　②[せん断]

③[すべり]　④[塑性]

⑤[σ_{th}，／τ_{th}]　⑥[fcc or 面心立方]

⑦[生じない，ほぼ生じない]