

材料評価学 第 14 回

- 前回：
- 材料力学の「はりの曲げ」の問題における
 - せん断力線図・曲げモーメント線図
 - 異なる形式のはり
 - 曲げ応力とは



- 今回：
- 材料力学の「はりの曲げ」の問題における
 - はりの曲げ応力
 - 断面二次モーメントと断面係数

14. はり（梁）の曲げ 4

14.1 曲げ応力算出式の導出

● 前回の内容を踏まえ、曲げ応力算出式を導出するために以下の項目が成り立つと仮定する。

- (1) 変形前に平面であった横断面は、曲げ変形後も平面を保つ(図 5.1(a))
- (2) はりをいわば縦繊維の集合物とみなす→応力は単軸応力と考える(同(b))
- (3) 変形はフックの法則に従う(同(b))

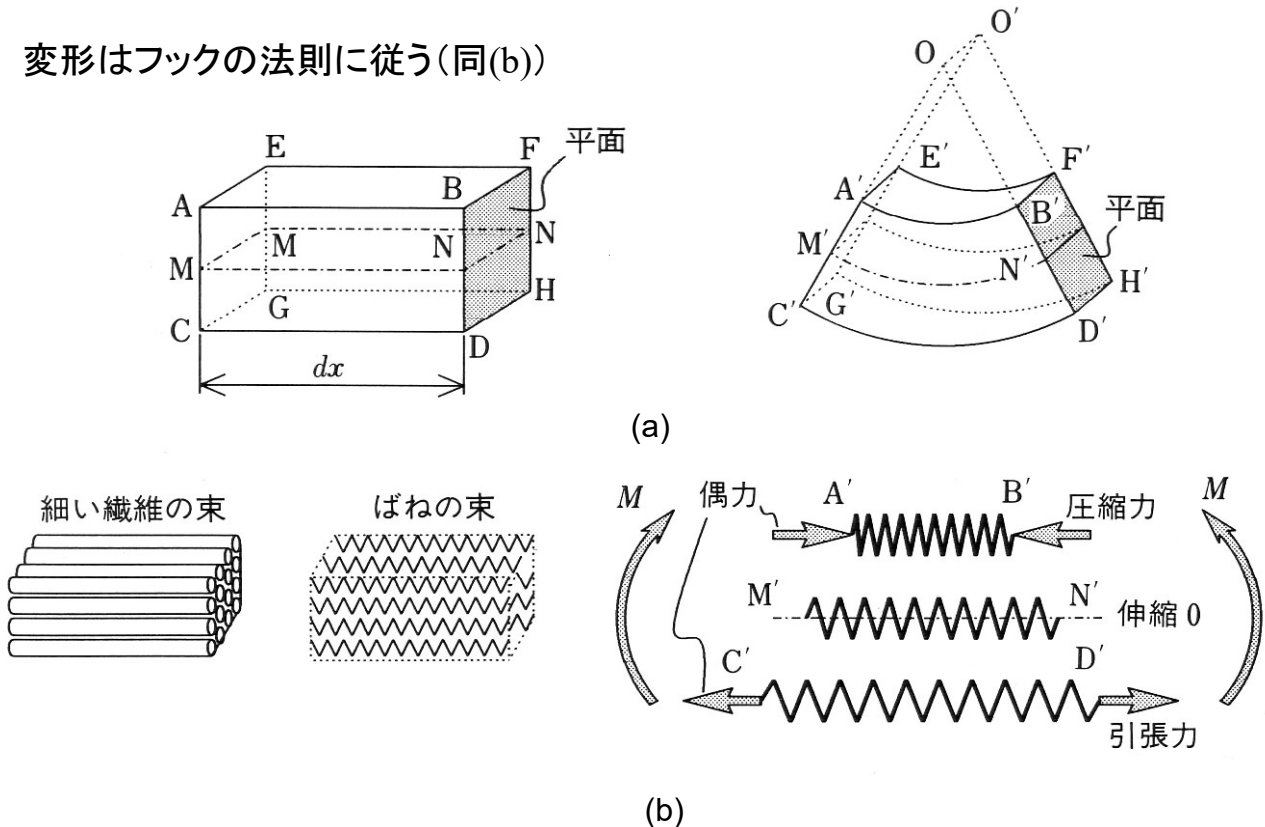
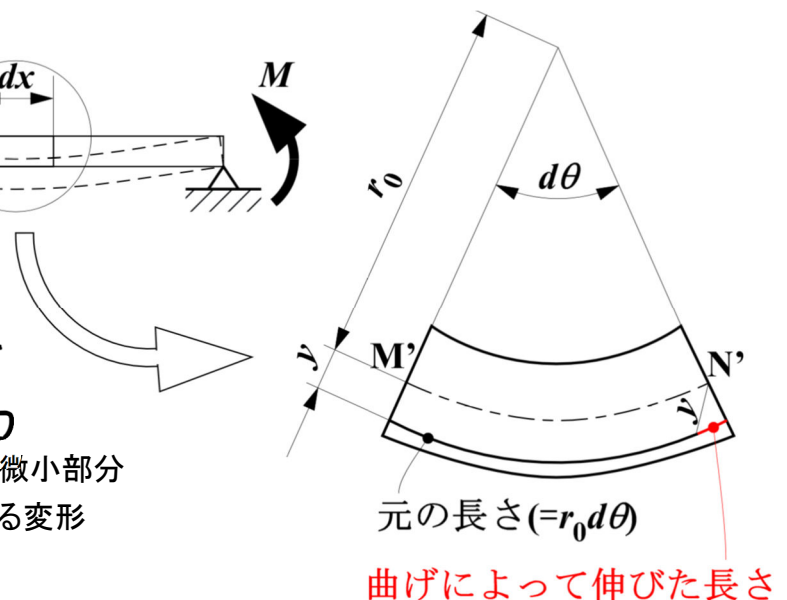


図 14.1 はりの曲げ応力算出式を求める上での仮定

● 曲げモーメント M が作用して下に凸に変形したはりにおいて、はり中の微小部分 dx を考える

中立面: 変形前後で長さが変わらない面
M-N

図 14.2 はりの微小部分における変形



・中立面 MN の曲率半径 r_0 : $r_0 d\theta = dx$

・中立面から y 離れた位置でのひずみ ε :
$$\varepsilon = \frac{(r_0 + y)d\theta - r_0 d\theta}{r_0 d\theta} = \frac{y}{r_0} \quad (1)$$

・応力は単軸でかつフックの法則に従う(前頁仮定(2), (3)より):

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{r_0} \quad (2)$$

$$\frac{\sigma}{y} = \frac{E}{r_0} \quad (2)'$$

曲げ応力は中立面からの距離 y に比例する

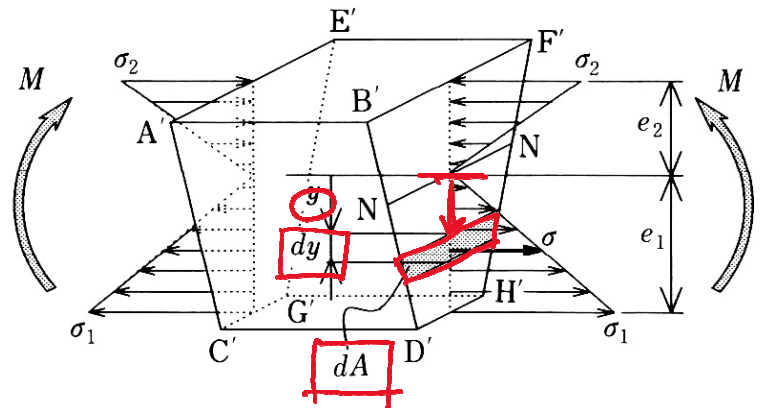


図 14.3 曲げ応力の分布

●曲げ応力は中立面からの距離 y に比例する

・微小面積 dA に作用する応力 $\sigma \rightarrow dA$ に作用する力: σdA
 $\rightarrow dA$ に作用するモーメント: $\sigma y dA$

・微小面積 dA に作用するモーメントの総和 = (2) 断面に作用するモーメント
 = 曲げモーメント

$$M = \int \sigma y dA \quad \leftarrow (2) \text{ を代入}$$

$$= \frac{E}{r_0} \int y^2 dA \rightarrow \text{「断面二次モーメント } I \text{」と呼ぶ}$$

$$= \frac{E}{r_0} I \quad \leftarrow (2)' \text{ を代入して整理}$$

$$\sigma = \frac{M}{I} y$$

14.2 断面二次モーメントと断面係数

- 断面二次モーメント：はりが、ばね面と平行な軸（この場合はz軸）回りに変形する際の、変形のしにくさの指標。z軸回りの $I = I_z$ と表~~わ~~す。

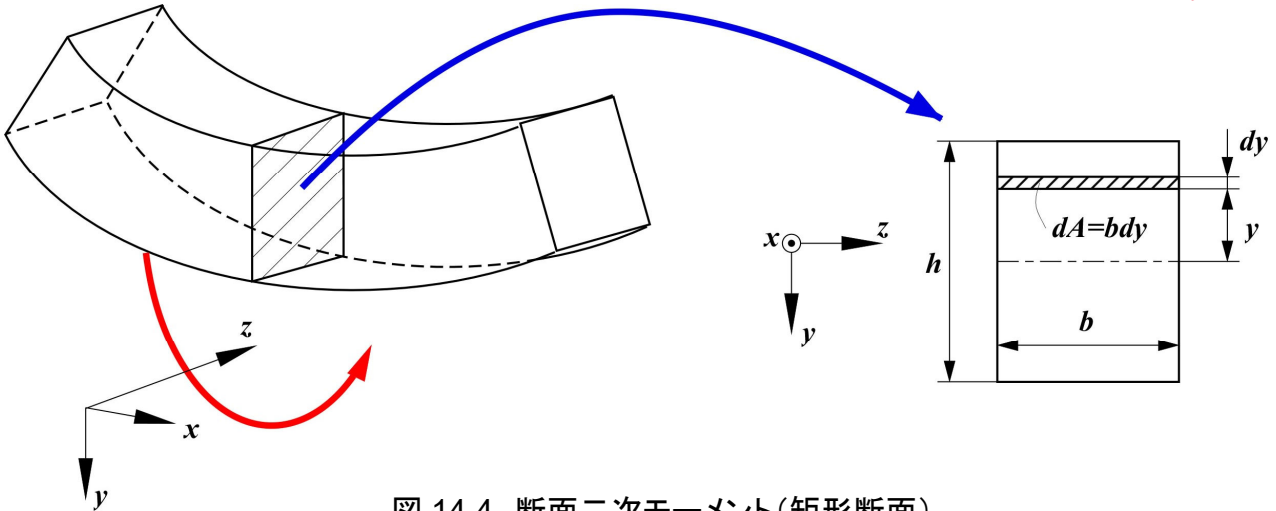


図 14.4 断面二次モーメント(矩形断面)

- 回転軸（この場合はz軸）周りの断面二次モーメント I_z の算出（矩形断面）

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{b h^3}{12}$$

- ・前頁で導出した曲げ応力算出式： $\sigma = \frac{M}{I_z} y$

正負の符号は気にしない

- ・曲げ応力の最大値： σ_{max} は曲げモーメントの 絶対値の最大値

$|M_{max}|$ は y_{max} に一致する

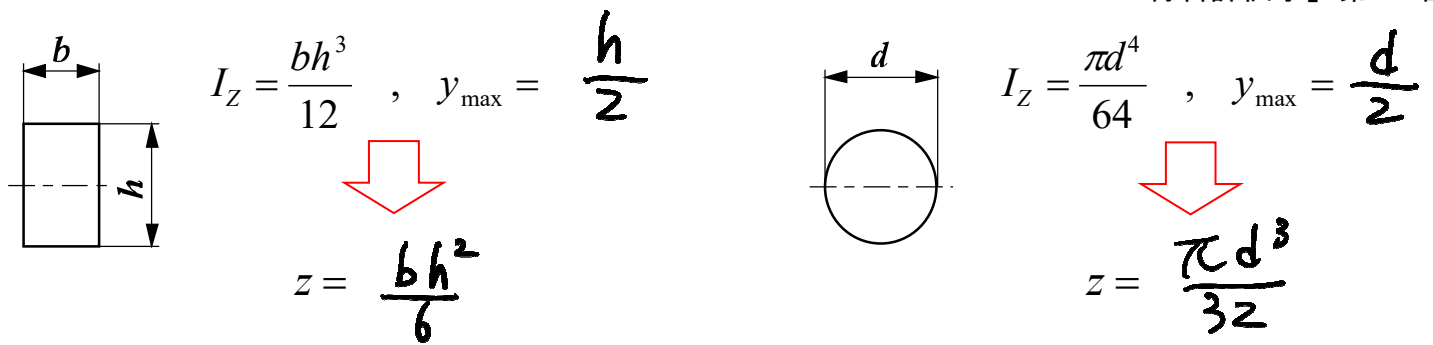
- ・矩形断面・・・ $y_{max} = h/2$

$$\rightarrow \sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{I_z} y_{max} = \frac{|M_{max}|}{\frac{b h^3}{12}} \frac{h}{2}$$

$$= \frac{|M_{max}|}{\frac{b h^2}{6}} = \frac{|M_{max}|}{Z}$$

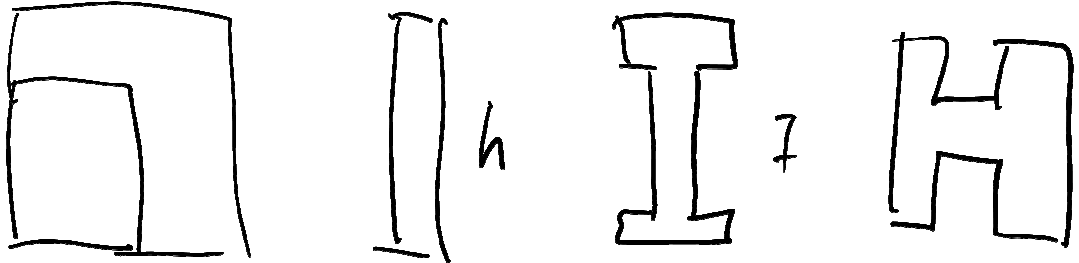
- 矩形断面の断面係数 Z : $Z = \frac{b h^2}{6}$

σ_{max} 算出式

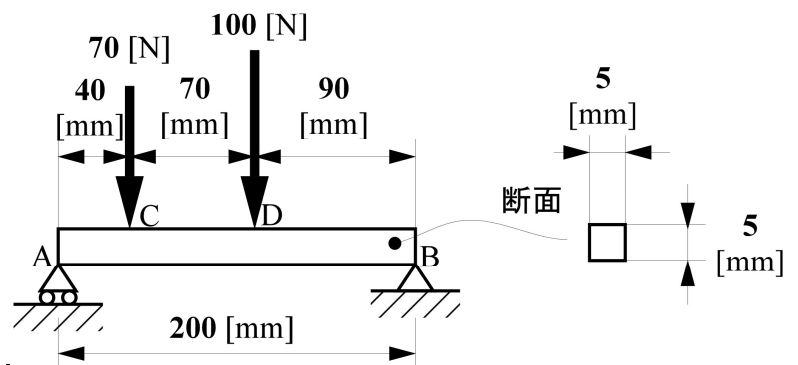
図 14.5 I_z と z (矩形断面および円形断面)

- ・ 問い: 導出した最大曲げ応力の算出式 $\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{Z}$ および矩形断面の断面係数

$Z = \frac{bh^2}{6}$ より, $\sigma_{\max}$ を低減させるためにはどのような方法が効果的か?



- ・ 例題: 以下の集中荷重を受ける両端支持はりに生じる曲げモーメント分布を導出し, 最大曲げ応力 $\sigma_{\max}$ を求めよ.



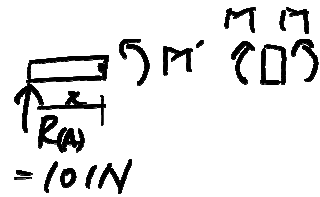
$$|M_{\max}| = 6210 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

$$Z = \frac{125}{6} \text{ mm}^3$$

$$\sigma_{\max} = 298 \text{ MPa}$$

(続き)

$$\begin{aligned} \cdot AC \text{ 間} \quad -R_A x + M' &= 0 \\ (0 \leq x \leq 40 \text{ mm}) \quad M' &= R_A x \\ &= 101x \text{ N}\cdot\text{mm} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{図より符号は (+)} \quad \therefore M &= 101x \text{ N}\cdot\text{mm}, & = \tau \text{ の } M_{\max} \\ & & = 4040 \text{ N}\cdot\text{mm} \\ & & (x = 40 \text{ mm}) \end{aligned}$$

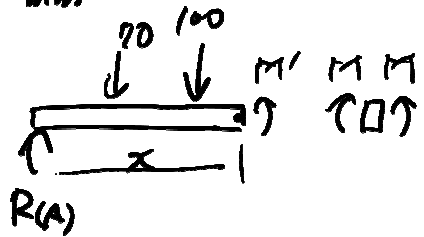
・CD 間

$$\begin{aligned} \text{第12回(3)問題より} \quad M &= 31x - 2800 \text{ N}\cdot\text{mm} \\ (40 \leq x \leq 110 \text{ mm}) & = \tau \text{ の } M_{\max} \\ & = 6210 \text{ N}\cdot\text{mm} \end{aligned}$$

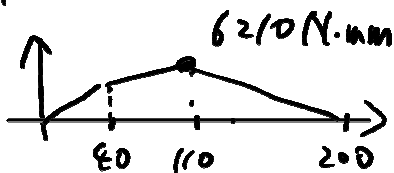
$$\begin{aligned} \cdot DB \text{ 間} \quad -R_A x + 70(x-40) + 100(x-110) + M' &= 0 \quad (x=110 \text{ mm}) \\ M' &= 101x - 70x - 100x + 2800 + 11000 \\ (110 \leq x \leq 200 \text{ mm}) \quad &= -69x + 13800 \text{ N}\cdot\text{mm} \end{aligned}$$

図より符号は (+)

$$\begin{aligned} \therefore M &= -69x + 13800 \text{ N}\cdot\text{mm} \\ & = \tau \text{ の } M_{\max} \\ & = 6210 \text{ N}\cdot\text{mm} \quad (x=110 \text{ mm}) \end{aligned}$$



BMD



$$\therefore 2 |M_{\max}| = 6210 \text{ N}\cdot\text{mm} \quad (x=110 \text{ mm})$$

$$Z = \frac{bh^2}{6} = \frac{125}{6} \text{ mm}^3$$

$$\begin{aligned} \therefore \sigma_{\max} &= \frac{6210}{\frac{125}{6}} = 298.08 \text{ N/mm}^2 \\ &= \underline{298 \text{ MPa}} \end{aligned}$$

14.3 第 14 回講義に関する意見・感想・質問のまとめ

●意見

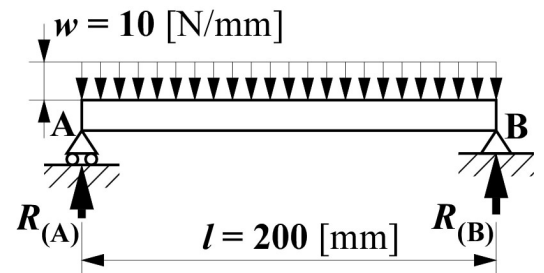
- ・つり合いの式や曲げモーメントの式をしっかりと復習する, しっかりと復習する, 覚えておいた方がいい式をしっかりと覚える, 復習が足りないことを実感, どの形式でも解けるように復習しておく, 考え方も計算も難しくなったのでよく復習する:16
- ・小テストでグラフの部分の知識が抜けていた, 分かったつもりになっていて自分でできなかった, 小テストに自信がない, 小テストが解けなかった, 小テストで詰めが甘かった, うろ覚えのまま解いて曲げモーメント算出ができなかった, グラフが逆向きになってしまった, 難易度が難しかった, 時間に余裕があった, 小テストで大きく失敗することがなくなってきた:15←今日の小テストは平均 4.0 点, 満点 5 名でこれまでのワーストを更新しました. きちんと復習して, 同形式の問題を自力で解けるようにしておくことが大切です.
- ・テスト勉強が焦ってきた, 1 ターム終了まであと 1 回, テストが近いので復習しっかりやる, 最後のテストで点を取れるように勉強する, 期末が近いのでレポートや小テストを復習し直す, 計画的に復習する, レポートとテストで挽回する, 今日学んだことを活かしてレポート課題を完成させる:15←他の科目や実験レポートもあり大変かと思いますが, 頑張ってください!
- ・曲げ応力の考え方や断面二次モーメントについて知ることができた, 曲げ応力の式を理解して使うことができた, 曲げモーメントの理解が深まった, 最大曲げ応力の求め方が分かった, 応力計算にだいぶ慣れてきた, 曲げモーメントがどういうものか分かった, 最大曲げ応力は途中の式を見返しながら解けた, 曲げ応力算出にも曲げモーメントが重要だと分かった, 中立面の意味がわかった, ほとんど理解できた:12
- ・曲げ応力の分布から先がよくわからなかった, 計算になると手順が多く難しかった, 授業内容が少し難しかった, 理解しづらかった, 曲げモーメント分布を求めると大変だった, 内容が混乱してきている:, 曲げモーメントがまだ難しく感じる, 次元が増えると混乱して脳みそがオーバーヒートしてしまう, I_z の算出が難しかった:10
- ・最後の例題は今まで習ったことの集大成のようで解いていて楽しかった, 今までの内容が最後の問に全て詰まっていた:2
- ・単位をいちいち書く癖をつける←これ本当に大事です.
- ・図を自分で組み立てられるようになる←ぜひ!
- ・木造建築は今回のようなことを応用した技術なのかなと感じた←鉄筋でも建物以外の構造物でも, こういう考え方は反映されています.
- ・例題の答えが合わなくて心が折れそう←自力で難しければ友達と相談しながら理解を深めてください.

●質問

- ・断面 2 次モーメントの導出の際の「 σ_y 」は「 $\sigma \times y$ 」という解釈であっているか?←その通りです, 紛らわしかったですね.
- ・最後の例題で有効数字は考えないのか?←考えません(70. N とか 40. mm とか与えていませんので)
- ・来週小テストはあるのか?←当然あります, 大事なところ話しましたよね?
- ・最大曲げ応力は引張と圧縮で 2 つ解答しなくていいのか?←はりの断面形状が対称であれば, 引張と圧縮の最大値の絶対値は同一になります.
- ・「表わす」ではなく「表す」では?←ご指摘ありがとうございます, その通りです. 修正しておきました.

14.4 第 13 回小テスト解答

Q.1 下図の分布荷重を受ける両端支持はりにおけるせん断力分布・曲げモーメント分布を求め、S.F.D. および B.M.D.を作成すると？



A.1

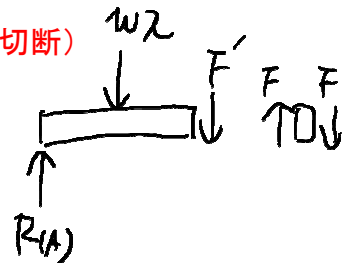
支持反力算出: 仮想的な集中荷重を考える

$$\therefore R_{(A)} = R_{(B)} = \frac{wl}{2} = 1000[\text{N}]$$

せん断力分布算出(はりの中心より左側の任意の位置で仮想的に切断)

力のつり合い式: $-R_{(A)} + wx + F' = 0 \rightarrow F' = R_{(A)} - wx$

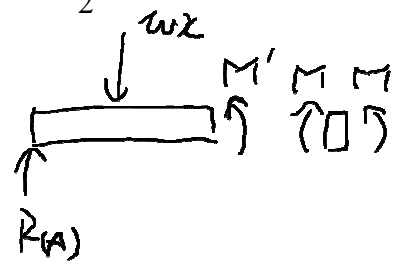
符号: (+) $\therefore F = R_{(A)} - wx = 1000 - 10x[\text{N}]$



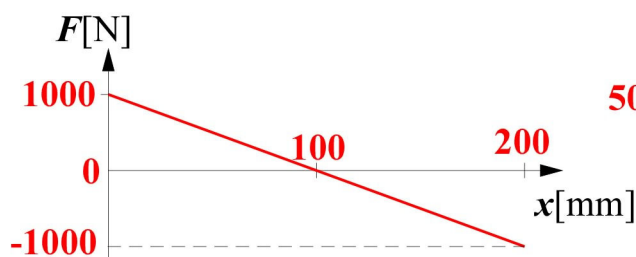
モーメント分布算出(回転中心: 仮想的な切断位置)

モーメントのつり合い式: $-R_{(A)} \cdot x + wx \cdot \frac{x}{2} + M' = 0 \rightarrow M' = R_{(A)} \cdot x - \frac{wx^2}{2}$

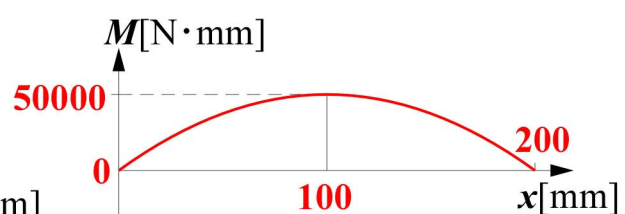
符号: (+) $\therefore M = R_{(A)} \cdot x - \frac{wx^2}{2} = 1000x - 5x^2[\text{N} \cdot \text{mm}]$



SFD および BMD 作成:



S.F.D



B.M.D