材料評価学　第 13 回

前回：　材料力学の「はりの曲げ」の問題における
・せん断力分布の算出
・曲げモーメント分布の算出

今回：　材料力学の「はりの曲げ」の問題における
・はりの形式
・せん断力線図・曲げモーメント線図
・異なる形式のはり

13.　はり（梁）の曲げ３

13.1　はりの形式

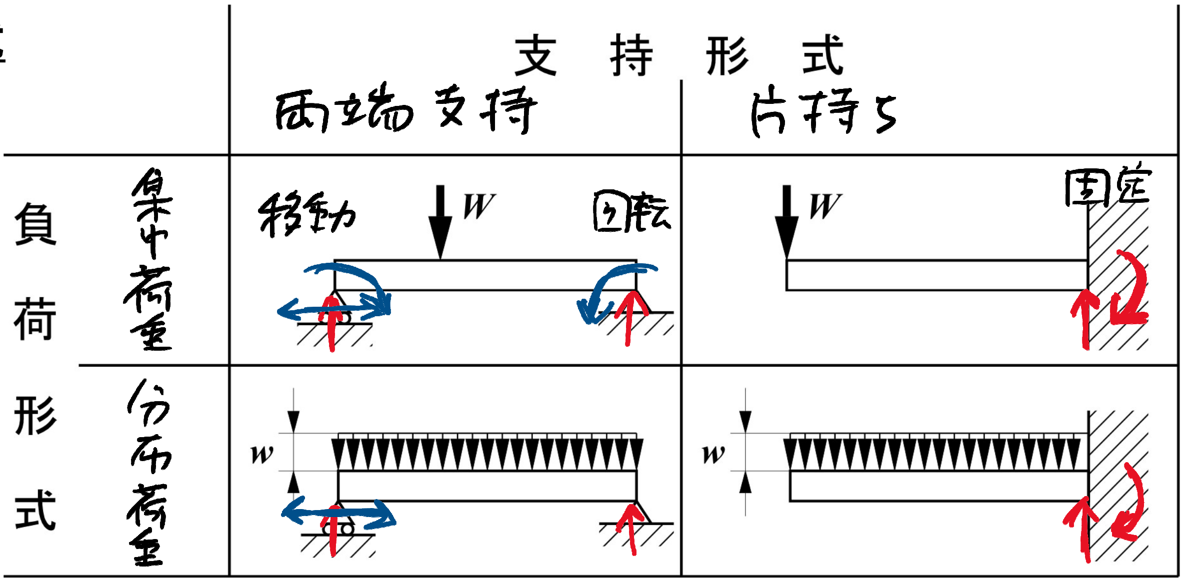


図 13.1　主なはりの形式

問い：はりの支持形式の違いによって，はりが受ける作用はどのように変化するか？

	水平移動可	回転可	垂直方向反力 (支持反力)	水平方向反力 (はりの伸びに対する反作用)	壁からはりへのモーメント
移動支持	○	○	○	生じない	×
回転支持	×	○	○	両方回転支持なら生じる	×
固定支持	×	×	○	生じない	生じる

13.2　せん断力線図および曲げモーメント線図の作成

●

	せん断力分布	曲げモーメント分布
・$0 \leqq x \leqq a$(AC 間):	$F = +\frac{b}{l}w$	$M = \frac{b}{l}wx$
・$a \leqq x \leqq l$(CB 間):	$F = -\frac{a}{l}w$	$M = \frac{a}{l}w(l-x)$

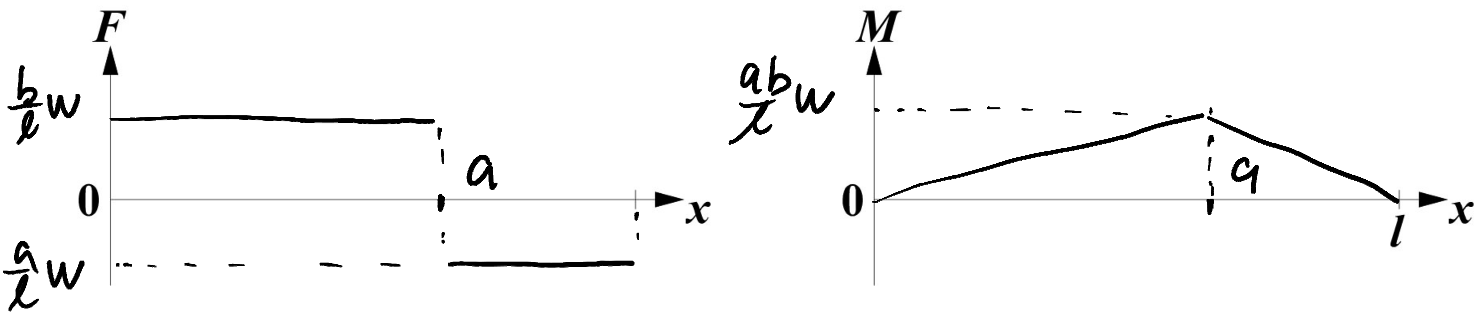


図 13.2　S.F.D.および B.M.D.

13.2　自由端に集中荷重を受ける片持ちはり

①支持反力の算出

・力のつり合い式: $W - R_{(B)} = 0$

$R_{(B)} = W$

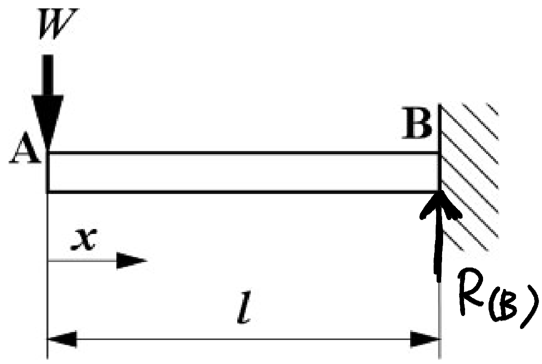


図 13.3　集中荷重を受ける片持ちはり 1

②せん断力分布の算出

・力のつり合い式: $W - F' = 0$

$F' = W$

・せん断力の符号: (−)

$\therefore F = ⊖W$

せん断力がはり全体にわたって一定

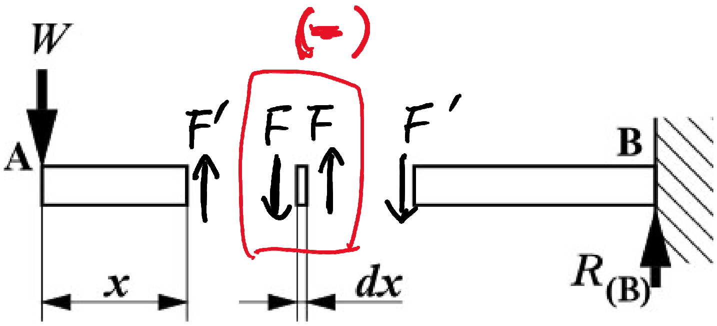
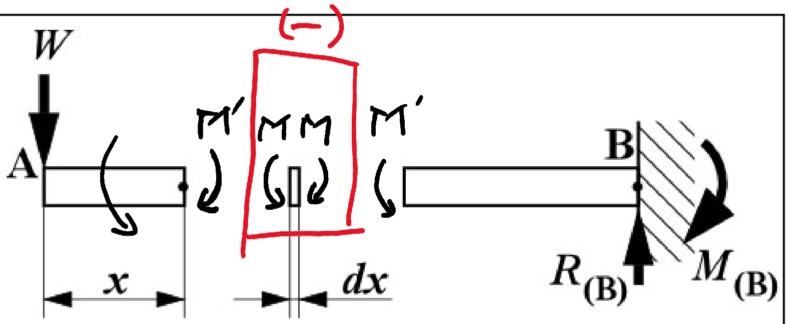


図 13.4　集中荷重を受ける片持ちはり 2

③曲げモーメント分布の算出

・ 例題：AB 間の曲げモーメントを求めよ．



・モーメントのつり合い式

（回転中心：x の位置）：

$$W\cdot x - M' = 0$$

$$M' = Wx$$

・曲げモーメントの符号： (−)

$M = (-)Wx$ 曲げモーメントは x に比例

●SFD，BMD の作成

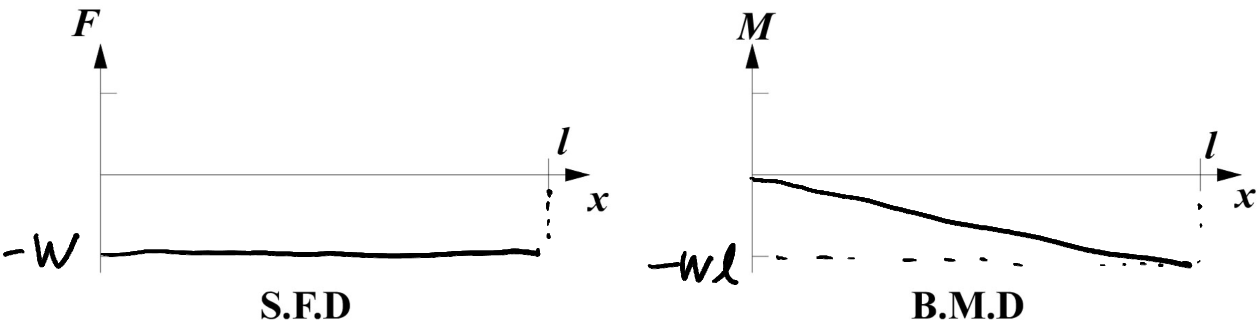


図 13.5 集中荷重を受ける片持ちはり S.F.D.および B.M.D

13.3 分布荷重を受ける両端支持はり

●分布荷重の考え方： モーメントを厳密に求めるのに手間がかかる

分布荷重を仮想的な集中荷重に置き換える．

①支持反力の算出 単位長さあたりの荷重

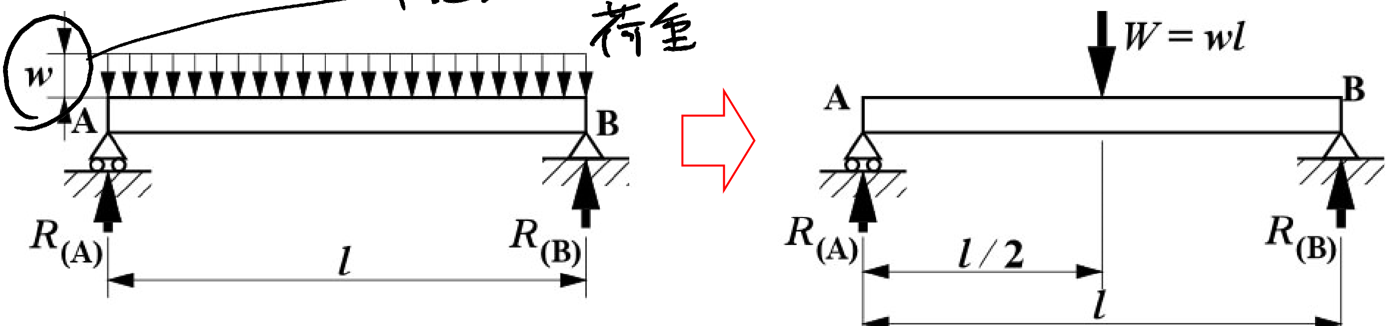


図 13.6 分布荷重を受ける両端支持はり 1

・力のつり合い式: $W - R_{(A)} - R_{(B)}$, $R_{(A)} = R_{(B)}$

$$\therefore R_{(A)} = \frac{W}{2} = \frac{wl}{2} = R_{(B)}$$

②せん断力分布の算出

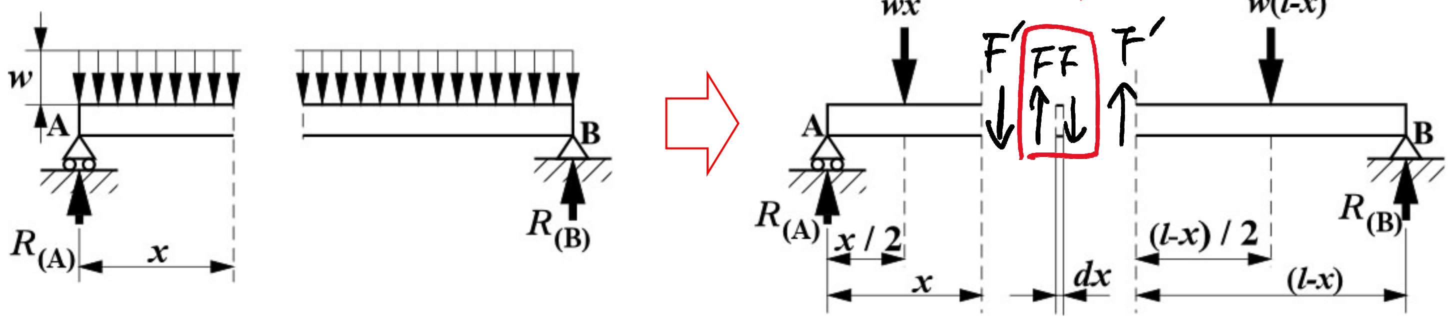


図 13.7　分布荷重を受ける両端支持はり 2

・力のつり合い式: $-R_{(A)} + wx + F' = 0$

$$F' = R_{(A)} - wx = \frac{wl}{2} - wx$$

$$= \frac{w}{2}(l - 2x)$$

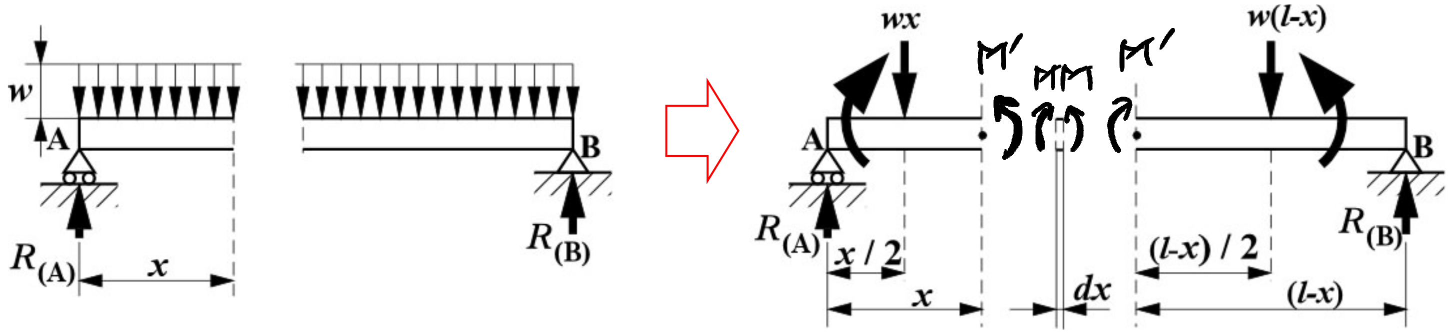
・せん断力の符号: (+)

$$F = \frac{w}{2}(l - 2x)$$

せん断力は x に対して線形

③曲げモーメント分布の算出

・ 例題:x までの曲げモーメントの大きさを求めるとともに作用する方向を記入せよ.



・モーメントのつり合い式(回転中心:x の位置):

$$-R_{(A)} \cdot x + wx \cdot \frac{x}{2} + M' = 0$$

$$M' = \frac{wx}{2}(l - x)$$

・曲げモーメントの符号: (+)

$$\therefore M = \frac{wx}{2}(l - x)$$

曲げモーメントは曲線的に変化

●SFD，BMD の作成

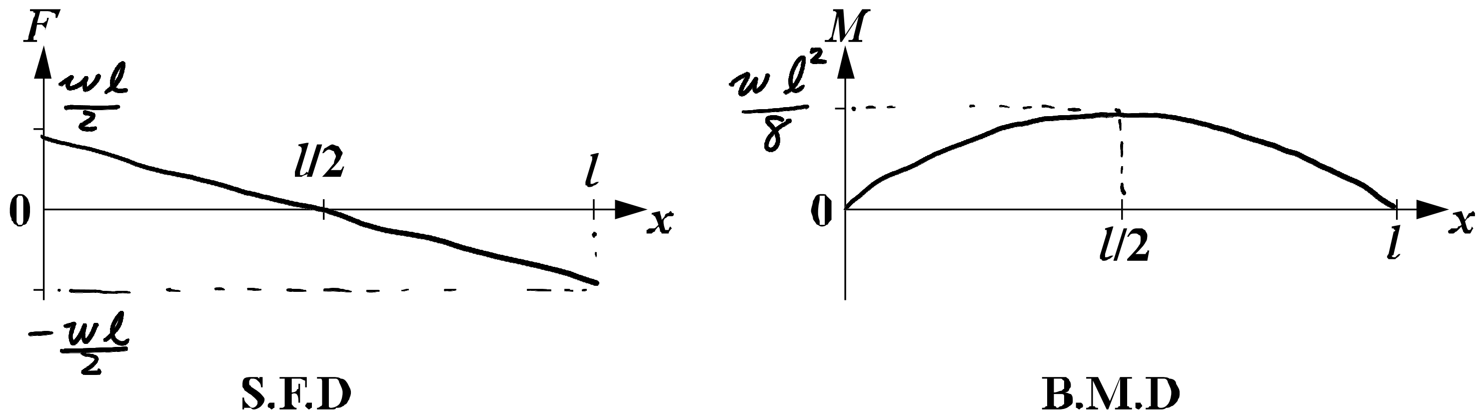


図 13.8 分布荷重を受ける両端支持はり S.F.D.および B.M.D

13.4 はりの曲げ応力とは

① 外力によるモーメント

⇒ xの位置においてWx，反時計回り

② ①の作用により，はりのたわみ発生

⇒ はりの上側では伸び，
下側では縮み

③ ②のたわみにより，はり内部に垂直応力発生

⇒ はりの上側（凸側）では引張
はりの下側（凹側）では圧縮

④ ③の引張･圧縮応力によりモーメント発生

⇒ その総和がM（曲げモーメント），
Wxとつり合う　$M=\int \sigma y \, dA = Wx$

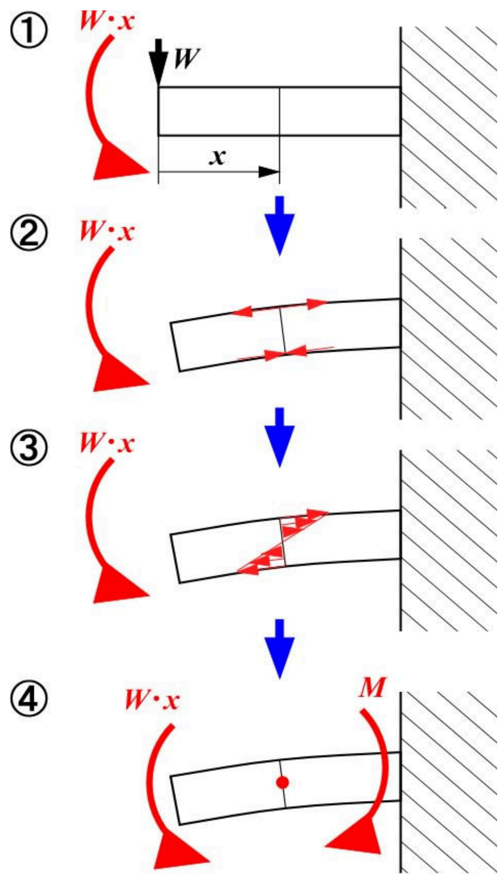


図 13.9 はりの曲げ応力の模式図

● 曲げ応力の特徴

1) 曲げ応力＝0 の位置がある･･･中立軸･中立面

2) 曲げ応力は中立軸からの距離 y に伴い増加する

3) ある任意の位置でのσと y の積を断面で総和→曲げモーメント

13.5　第 13 回講義に関する意見・感想・質問のまとめ

●意見

・分布荷重の考え方を理解できた，計算の仕方にだいぶ慣れてきた，負荷形式と支持形式によって作用が変わってくることがわかった，SFD と BMD についてわかった，曲げモーメントの理解が深まった，より微視的に見ることで現象に説明がつくことがわかった，曲げモーメントが求められるようになった，支持形式（片方の車輪）について理解できた，今回で符号の決定手順を覚えられた：17←今回の授業でだいぶ分布式導出に慣れたという人が増えてきて良かったです．

・導出の仕方を復習する，正負の判断を復習する，符号がまだ怪しいので復習する，集中荷重での考え方を理解する，図を見て曲げ応力について理解を深める，支持形式の違いについて復習する，曲げモーメントの求め方にまだ慣れていないので練習する：14

・小テストでうまく解答できなかった，モーメントの向きを間違えた，微小領域の図をはりの真横に書けなかった，場合分けで混乱した，うろ覚えだったことを実感した，小テストができなかった．小テストで何度か解くことで理解できるようになってきた，小テストの時間が足りなかった，モーメントの向きや符号がわからなくなってしまうことが多かった，計算ミスしたかもしれない：12←今回の小テストは平均 4.1 点，満点 5 名でした．大半の人が「領域分割の仕方の誤り」「モーメントの向きの取り違え」「符号の判断の誤り」（そもそも微小領域の図をちゃんと描いていない）「計算ミス」といった誤りをおかしていました．

・前回の授業をしっかり理解できていなかった，モーメントのつり合いのついて間違った理解をしていた，曲げモーメントの符号が予想と反対で驚いた，符号を理解するには自身で図を描かなければならないと感じた：6←前回から「微小領域の図をちゃんと描くように」と説明していたはずですが，やはり聞いていない人が多かったようです．

・テストが近づいてきたので復習する，テスト勉強を頑張る，今までの復習をする：5

・喉がイガイガして集中できなかった，30 分寝坊してしまった：2←気温も上がってきて体調を崩しやすい時期ですので，体調管理に注意してください．

・内容を理解できた，図がわかりやすく復習しやすい，図や動画で理解がしやすかった：6

・後半が少し難しかった，BMD のグラフがイメージしづらい（なぜ中心で一番曲げモーメントが大きくなるのか？）←まず，せん断力や曲げモーメントの分布ははりの支持形式によって変わる，ということは理解してますよね？その上で，両端支持はりでは両端で回転を許容されながら支えられている訳ですから，両端ではりをたわませる作用（＝曲げモーメント）は 0 で，両端から最も離れている中央で最大となります．

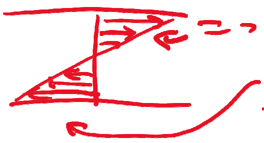
●質問

・定期試験の教室は変更ないのか？←近日中に皆さんにも通知されると思いますが，本科目の定期試験の講義室は変更なし（103 講義室）です．

・両端支持で固定支持を含む場合は考えられるか？←一端が固定支持の両端支持はりというのはあまり見た覚えがありませんが，モデルとしてそういうケースを取り扱うことはできるかと思います．

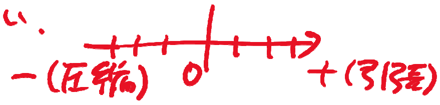
・分布荷重で均一でない場合は集中荷重にどう置き換えるのか？←例えば三角形状の分布荷重の場合，三角形の図心に三角形面積分の荷重が作用するとして置き換えます．

・圧縮応力の図の表記について←

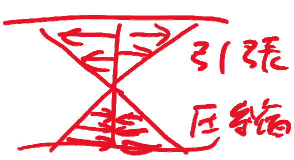


こっちが引張としたら，

こっちは圧縮といえるのか？という質問でしたが，いわゆる数直線的に捉えて下さい．



確かに，こう描いてある図もあります．



13.6 第 12 回小テスト解答

M M のように考える人多数！

これでは同じ向きになっている

Q.1 下図の両端支持はりにおける曲げモーメント分布式を求めると？

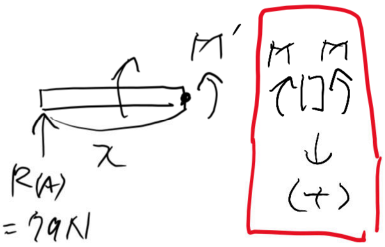
◎ xは常に「はり左端からの距離」としてとる。

A.1 それぞれの領域における曲げモーメントを求める.

・AC 間[$0 \leqq x \leqq 30$ [mm]]

モーメントのつり合い式： $-R_{(A)}x + M' = 0$

$M' = R_{(A)}x$

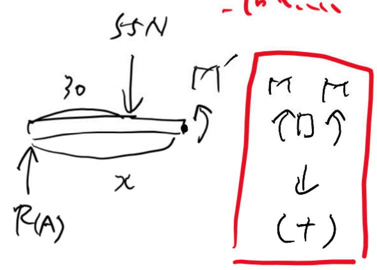


この図がないと減点

微小領域の図より 符号：(＋) $\therefore M = R_{(A)}x$

$= 79x$ N·mm

・CD 間[$30 \leqq x \leqq 80$ [mm]]

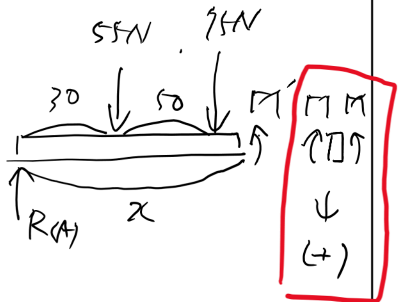


モーメントのつり合い式： $-R_{(A)}x + 55(x-30) + M' = 0$

$M' = R_{(A)}x - 55x + 1650$

微小領域の図より 符号：(＋) $\therefore M = 79x - 55x + 1650$

$= 24x + 1650$ N·mm



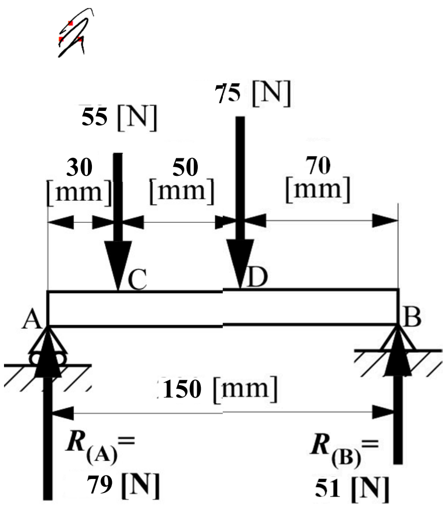
・DB 間[$80 \leqq x \leqq 150$ [mm]]

モーメントのつり合い式： $-R_{(A)}x + 55(x-30) + 75(x-80) + M' = 0$

$M' = R_{(A)}x - 130x + 7650$

図より符号：(＋) $\therefore M = 79x - 130x + 7650$

$= -51x + 7650$ N·mm

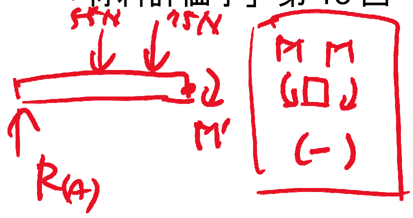


$$\therefore M = \begin{cases} 79x & (0 \leqq x \leqq 30) \\ 24x + 1650 & (30 \leqq x \leqq 80) \\ -51x + 7650 & (80 \leqq x \leqq 150) \end{cases}$$

いずれも N·mm

次頁補足

もし仮にM′の向きを逆にしてしまったとしても、正しく解けば最終的な式の形は一致します。



$$-R(A)x + 55(x-30) + 75(x-80) - M' = 0$$

$$M' = -R(A)x + 130x - 7650$$

$$= 51x - 7650 \ \mathrm{N\cdot mm}$$

図より符号：(−)　$\therefore M = -(51x - 7650)$

$$= -51x + 7650 \ \mathrm{N\cdot mm}$$