

材料評価学 第 12 回

- 前回：
- 材料力学の「はりの曲げ」の問題における
 - ・「材料力学」とは
 - ・「せん断力」と「曲げモーメント」とは
 - ・はりの曲げの解法
 - ・支持反力の算出



- 今回：
- 材料力学の「はりの曲げ」の問題における
 - ・せん断力分布の算出
 - ・曲げモーメント分布の算出

12. はり（梁）の曲げ2

12.1 ②せん断力分布の算出

●前回と同じモデル（集中荷重を受ける両端支持はり）

AC 間（集中荷重の位置より左側）

1) 任意の位置 x にて仮想的に切断

・ x までの領域における力のつり合い式:

$$-R(A) + F'_1 = 0$$

$$F'_1 = R(A) = \frac{b}{l} w$$

・ x 以降の領域における力のつり合い式:

$$-F'_2 + W - R(B) = 0$$

$$F'_2 = W - R(B) = W - \frac{a}{l} W = \left(1 - \frac{a}{l}\right) W = \frac{b}{l} W$$

∴ F'_1 と F'_2 は大きさが等しく向きが逆

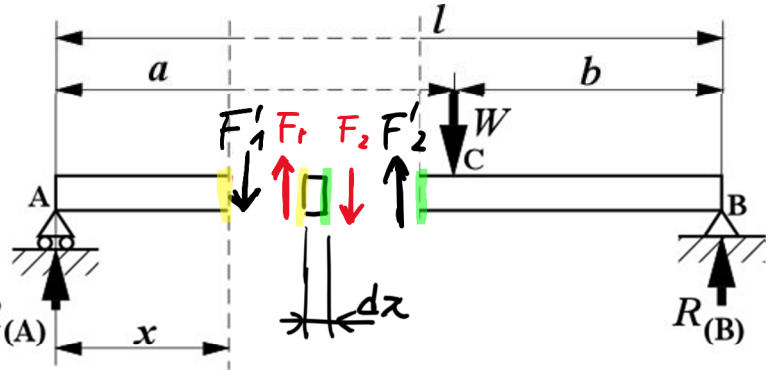


図 12.1 せん断力分布算出 1

2) x の位置におけるはりの微小領域（長さ: dx ）を考える

・接する面における力のつり合い: 等しい大きさと向きが逆な力があれば相殺=つり合う

$$F'_1 - F_1 = 0$$

$$F_2 - F'_2 = 0$$

$$F_1 = F'_1 = \frac{b}{l} w$$

$$F_2 = F'_2 = \frac{b}{l} w$$

∴ F_1 と F_2 も大きさが等しく向きが逆

3) つまり, はりの微小領域には大きさが等しく ($\frac{b}{l} w$) 向きが逆な一対の内力 F_1 と F_2 が作用する

↓

集中荷重の位置より右側 (CB 間) では
どうなるか?

●CB間（集中荷重の位置より右側）

1) x で仮想的に切断・ x までの領域における力のつり合い式:

$$\begin{aligned}
 -R(A) + W - F'_1 &= 0 \\
 F'_1 &= -R(A) + W \\
 &= W - \frac{1}{2}W \\
 &= \frac{1}{2}W
 \end{aligned}$$

・ x 以降の領域における力のつり合い式: $F'_2 - R(B) = 0$

$$F'_2 = R(B) = \frac{1}{2}W$$

∴ AC間と同様 ($F'_1 = F'_2$, かつ向きは逆)

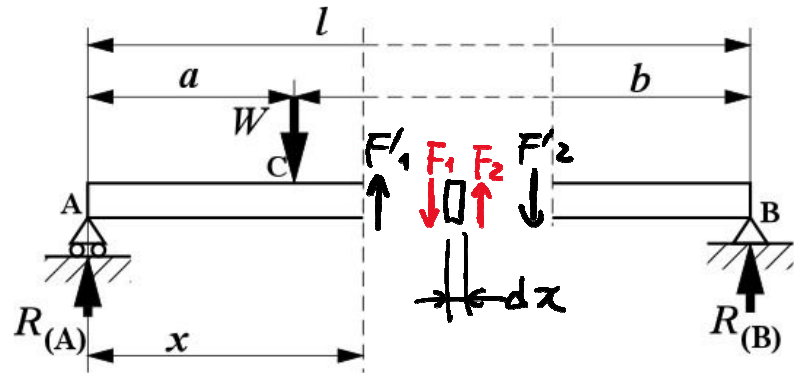


図 12.2 せん断力分布算出 2

2) x の位置におけるはりの微小領域 (長さ: dx) を考える

・接する面における力のつり合い:

$$\begin{aligned}
 -F'_1 + F_1 &= 0 \\
 F_1 &= F'_1 = \frac{1}{2}W
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -F_2 + F'_2 &= 0 \\
 F_2 &= F'_2 = \frac{1}{2}W
 \end{aligned}$$

∴ AC間と同様 ($F_1 = F_2$, かつ向きは逆)

3) つまり, はり全体にわたって一対の内力 F_1 と F_2 が作用する

「せん断力 F 」と定義する。

●注 ①せん断力の大きさ:

AC間

$$\frac{b}{2}W$$

と変化する。

CB間

$$\frac{a}{2}W$$

②せん断力の方向:

AC間

↑□↓

CB間

↓□↑

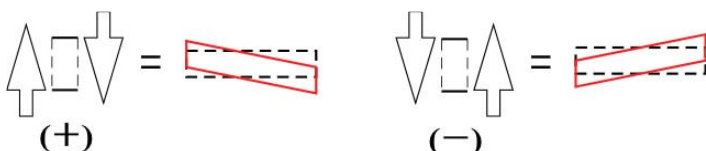


図 12.3 せん断力の符号

$$F = \begin{cases} \frac{b}{2}W & (\text{AC間}) \\ -\frac{a}{2}W & (\text{CB間}) \end{cases}$$

12.2 ③曲げモーメント分布の算出

●せん断力分布と同様, AC 間

1) 任意の位置 x にて仮想的に切断・ x までの領域におけるモーメントのつり合い式: □ 転中心: x

$$-R(A)x + M'_1 = 0$$

$$M'_1 = R(A)x = \frac{b}{l}wx$$

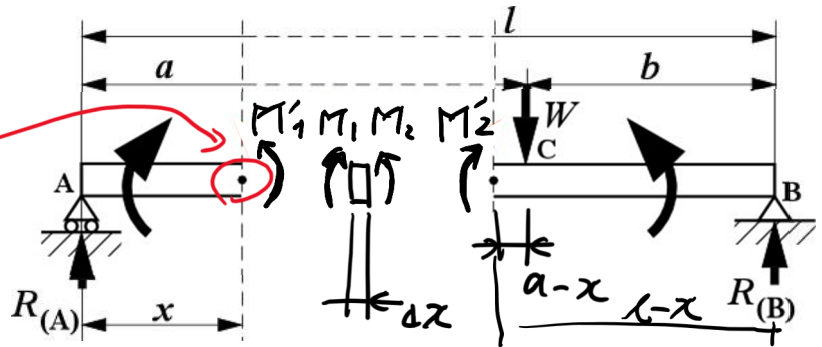


図 12.4 曲げモーメント分布算出 1

・ x 以降の領域におけるモーメントのつり合い式:

$$-M'_2 - W(a-x) + R(B)(l-x) = 0$$

$$M'_2 = R(B)l - R(B)x - Wa + Wx$$

$$= \frac{b}{l}wx$$

$\therefore M'_1$ と M'_2 は大きさが等しく向きは逆

2) x の位置におけるはりの微小領域 (長さ: dx) を考える

・ 接する面におけるモーメントのつり合い:

$$-M'_1 + M_1 = 0$$

$$M_1 = M'_1 = \frac{b}{l}wx$$

$$M_2 - M'_2 = 0$$

$$M_2 = M'_2 = \frac{b}{l}wx$$

$\therefore M_1$ と M_2 も大きさは等しく向きは逆

3) つまり, はりの微小領域には大きさが等しく ($\frac{b}{l}wx$) 向きが逆な一対のモーメント M_1 と M_2

が作用する

●CB間（集中荷重の位置より右側）

1) x で仮想的に切断・ x までの領域におけるモーメントの

つり合い式:

$$-R_{(A)}x + W(x-a) + M'_1 = 0$$

$$M'_1 = \frac{a}{l} W(l-x)$$

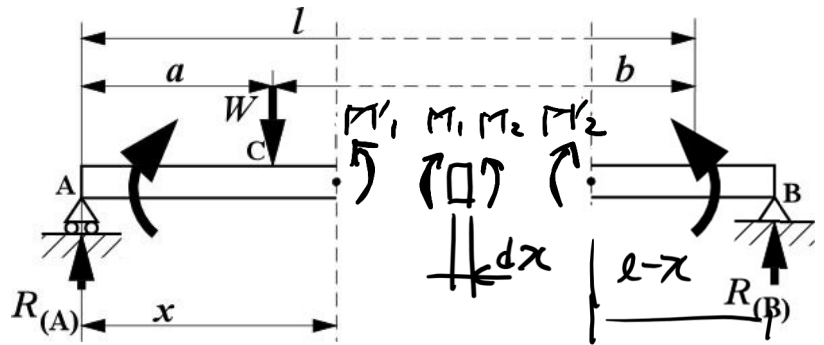


図 12.5 曲げモーメント分布算出 2

・ x 以降: 省略

$$-M'_2 + R_{(B)}(l-x) = 0$$

$$M'_2 = R_{(B)}(l-x) = \frac{a}{l} W(l-x)$$

∴ AC間と同様 ($M'_1 = M'_2$, かつ向きが逆)

2) x の位置におけるはりの微小領域 (長さ: dx)

$$M'_1 - M_1 = 0$$

$$-M_2 + M'_2 = 0$$

$$M_1 = M'_1 = \frac{a}{l} W(l-x)$$

$$M_2 = M'_2 = \frac{a}{l} W(l-x)$$

∴ AC間と同様 ($M_1 = M_2$, かつ向きが逆)

3) つまり, はり全体にわたって一対のモーメント M_1 と M_2 が作用する

「曲げモーメント M 」と定義する。

●注 ①曲げモーメントの大きさ:

AC間

$$\frac{b}{l} Wx$$

CB間

$$\frac{a}{l} W(l-x)$$

と変化
する

②曲げモーメントの方向:

AC間

↑□↑

CB間

↑□↑

で変化しない。

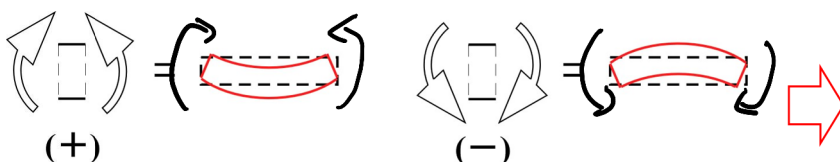


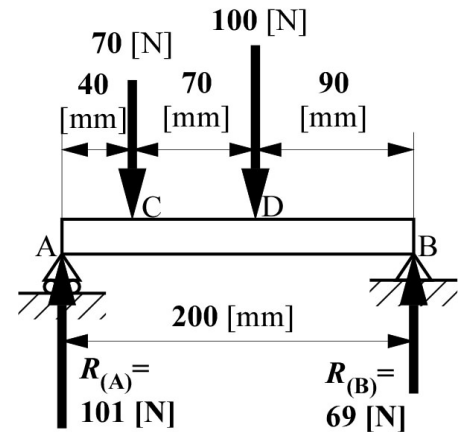
図 12.6 曲げモーメントの符号

$$M = \begin{cases} \frac{b}{l} Wx & (\text{AC間}) \\ \frac{a}{l} W(l-x) & (\text{CB間}) \end{cases}$$

・ 例題: 右図の両端支持はりにおいて,

A.1 C点間のせん断力 F を求めよ。

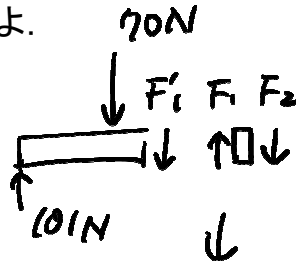
A.2 C点間の曲げモーメント M を求めよ。



Q.1

$$-101 + 70 + F'_1 = 0$$

$$F'_1 = 101 - 70 \\ = 31 \text{ N}$$

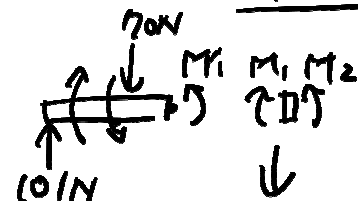


図太し符号は (+) $\therefore F = 31 \text{ N}$

Q.2

$$-101x + 70(x - 40) + M'_1 = 0$$

$$M'_1 = 31x + 2800 \text{ N}\cdot\text{mm}$$



図太し符号は (+)

$$M = 31x + 2800 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

● せん断力線図と曲げモーメント線図
SFD BMD

せん断力分布

曲げモーメント分布

・ $0 \leq x \leq a$ (AC 間): $F = \frac{b}{l}w$

$M = \frac{b}{l}wx$

・ $a \leq x \leq l$ (CB 間): $F = -\frac{a}{l}w$

$M = \frac{a}{l}w(l - x)$

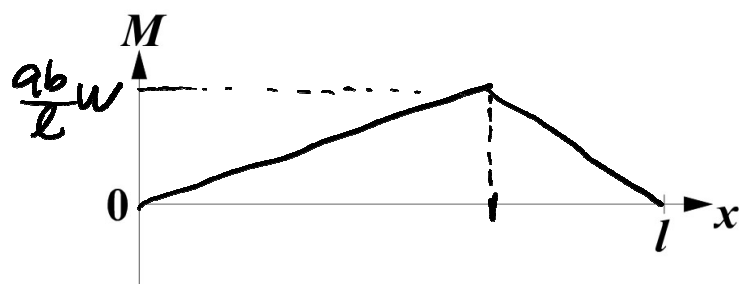
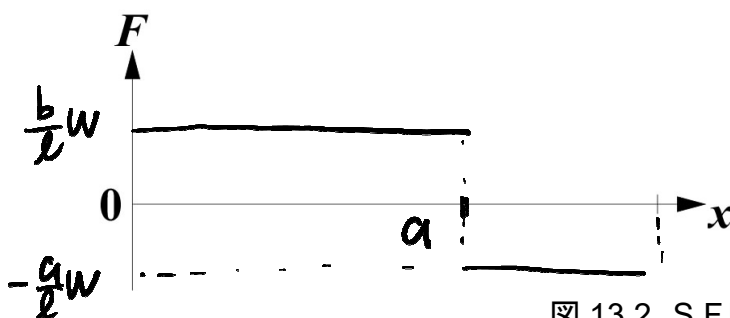


図 13.2 S.F.D. および B.M.D.

12.4 第 12 回講義に関する意見・感想・質問のまとめ

●意見

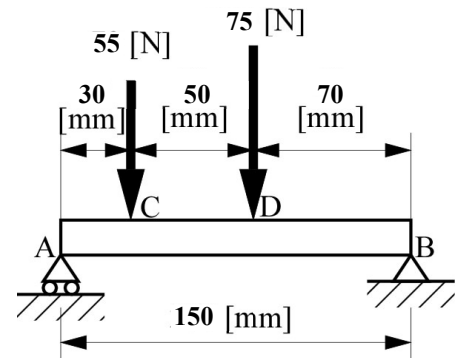
- ・せん断力と曲げモーメントの計算の仕方が理解できた, 全体的に似たような考え方で理解しやすかった, せん断力と曲げモーメントともに一対で考えるということがわかった, 図のおかげで理解しやすくなった, 授業内容は理解できた, 1 こずつ確実に理解しながら授業が受けられた, 高校物理のような内容でわかりやすかった:15
- ・符号が混乱しそう, 符号がややこしい, 符号の図の書き方がよくわからなかった, 符号に注意しなければならないのが今回の授業で一番大切, 計算は簡単だったが向きを考えることが難しい:14←**確かに, 符号に関しては約束事なので覚えるしかないですね.**
- ・次の授業までに理解する, 線弾力と曲げモーメントの概念をしっかり抑える, 今日の計算をもう一度自分でやってみる, 1 ページ目からちょっとよくわからない内容があったので見直しする, 曲げモーメントと通常のモーメントが混ざらないように理解する, 全体的に理解が困難だったので復習する:10
- ・最後の例題の曲げモーメントの式を間違えてしまった, 最後の例題で力の向きを間違えた, 例題で手が止まってしまった, 例題を自力で解けた, 例題の符号の決め方がわからなかった:5←**例題も符号の決め方は図 12.3・図 12.6 の通りです.**
- ・今日の小テストは比較的スムーズに解けた, 小テスト良かった, 支持反力は簡単だった:4←**今日の小テストは平均 8.7 点, 満点 42 名でした. 今までの Best 更新です!**
- ・ミスが減らすためにちゃんと図を描く, 図を描かずに計算したら曲げモーメントの正負があやふやになった, 図を自分で描くと理解が深まった:4←**図を描くことは符号を極めるために不可欠です. 今後の小テストやレポート, 定期試験でも図がない解答は減点対象です.**
- ・期末テストのため総復習をする, テストに向けた復習が大事:3
- ・授業の進度がちょうど良かった, いつもより進行速度が速いと感じた:2
- ・高校の内容に大学の内容が入り込んできて面白かった, 「仮想的な位置で切断したと考える」という考え方が面白い:2
- ・計算は容易だったが領域の分け方で迷ってしまいそう←**集中荷重の場合は, はりの領域は集中荷重を境に分割します.**

●質問

- ・例題 A.2 で x の範囲は特定すべきか? (CD 間: $40 \leq x \leq 70$) (2 名) ←**そうですね, 確かに曲げモーメントは x の変数ですので, x の範囲も合わせて解答した方がいいです.**

12.5 第11回小テスト解答

Q.1 右図の両端支持はりにおける支持反力を求めよ。
(この計算において有効桁数は特に考慮しない)



A.1 力と回転モーメントのつり合い式から支持反力を求める。

$$\begin{cases} -R(A) + 55 + 75 - R(B) = 0 \\ -55 \cdot 30 - 75 \cdot 80 + R(B) \cdot 150 = 0 \quad (\text{回転モーメント: } A \text{ を中心}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R(A) = 130 - R(B) \\ 150 R(B) = 7650 \\ R(B) = 51 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} R(A) &= 130 - 51 \\ &= 79 \end{aligned}$$

$$\therefore R(A) = 79 \text{ N}, R(B) = 51 \text{ N}$$

注: 上記のような「力と回転モーメントのつり合い式」からではなく、「回転モーメントのつり合い式を2本立ててそれぞれから求めた」場合も正解とした。