材料評価学　第 11 回

前回：　衝撃試験における
・「衝撃試験」とは
・衝撃吸収エネルギーと破壊形態
・延性−ぜい性遷移

今回：　材料力学の「はりの曲げ」の問題における
・「材料力学」とは
・「せん断力」と「曲げモーメント」とは
・はりの曲げの解法
・支持反力の算出

11.　はり（梁）の曲げ 1

11.1　「材料力学」とは

●これまで：　負荷形式による応力とひずみの定義
　　　　　　弾性変形と塑性変形

・材料の強度を表わす指標：降伏応力，引張強さ
（ヤング率：弾性特性）

●実際の使用条件（材料の形状・寸法）において材料内部に発生する応力や変形はどの程度になるのか？

→ 発生する応力が降伏応力を超えたら？→ 塑性変形
→ 〃 が引張強さを 〃 → 破壊

↳ 把握するためには？→「材料力学」

11.2　「はり(梁)の曲げ」とは

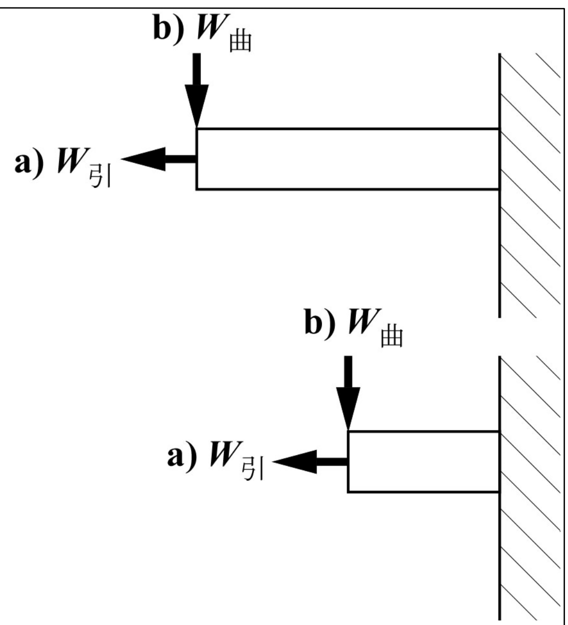
●「はり（梁）」とは？：横荷重を受けることにより，せん断力および曲げモーメントを生じる，細長い部材のこと．

・問い：壁に一端を固定された，長さが異なり断面積が等しい 2 本のはりがある．

a)　それぞれのはりの自由端に等しい引張（縦）荷重をかけた場合，どちらがより高い応力を生じるか？

A，いずれも等しい引張応力を生じる．

$$\sigma = \frac{W}{A_0}$$



b)　それぞれのはりの自由端に等しい曲げ（横）荷重をかけた場合，どちらがより高い応力を生じるか？

A. $\sigma = \dfrac{M}{Z}$ ← 曲げモーメント，はりを屈曲させようとする作用
横荷重×はりの長さ
Z ← 断面係数
↳ 長いはりの方が高い応力を発生する。

11.3 「せん断力」と「曲げモーメント」とは

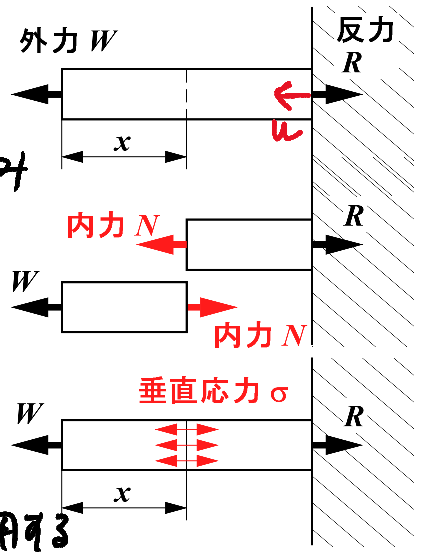


図 11.1 垂直荷重を受けるはり

●垂直荷重の場合： 外力Wと反力Rは作用線が一致しているため，力のつり合いのみ考えればよい。

・はり全体の力のつり合い：　$W = R \quad (W - R = 0)$

・左端から任意の位置 x において：はりを「仮想的に」切断する…はり内部の状況を可視化するため

↳ 切断面において内力Nがそれぞれ作用すると考えることで，力のつり合いがとれる

$\therefore W = N,\ N = R$

・垂直応力 σ の本来的意味

$N = \int_A \sigma\, dA$，単位面積あたりの内力$=\sigma$

●曲げ荷重の場合： WとRの作用線が一致しない

→ 力のつり合いとともに，モーメントのつり合いも考慮する。

①力のつり合い：$W = R$

・任意の位置xにおいて仮想的に切断

→ 内力Fがそれぞれに作用すると考えることで力のつり合いがとれる。

$W = F,\ F = R$

・せん断応力τの本来的意味：

$F = \int_A \tau\, dA$

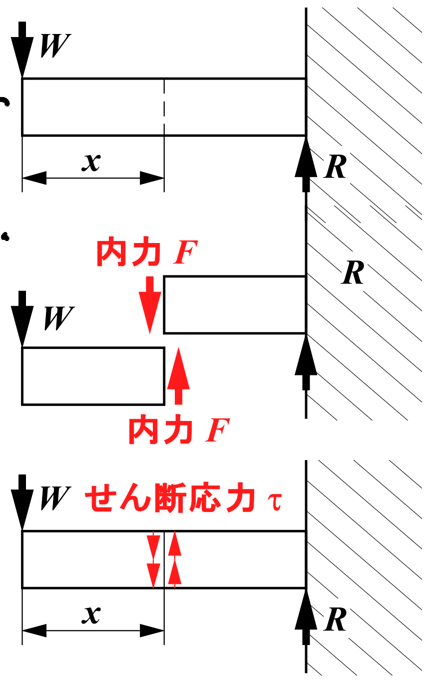


図 11.2 曲げ荷重を受けるはり
（力のつり合い）

はりを回転させようとする作用

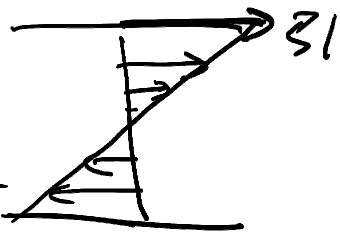
②$\boxed{\text{モーメント}}$のつり合い:

・左端から任意の位置 x においてはりを「仮想的に」切断する

→ 切断した左側部分に作用する外力 W によって、回転中心 x に対して $W \cdot x$ という反時計回りのモーメントが作用する。

→ Wx につり合うモーメント M がはり内部で発生することで、モーメントのつり合い
$$Wx = M$$
がとれる。

・このモーメント: はり内部に発生する引張および圧縮応力の分布に起因する。(次回以降で詳述)



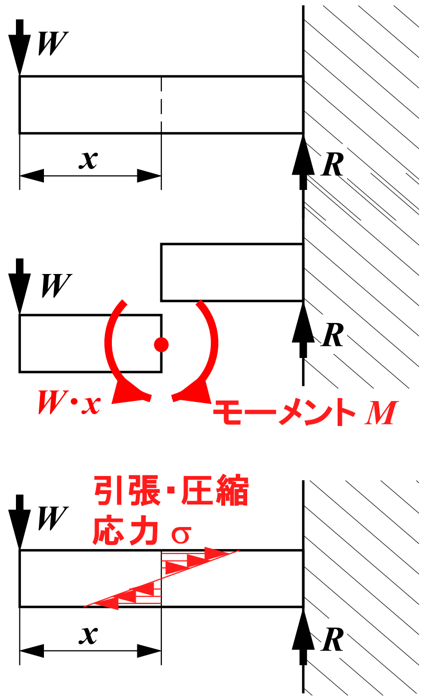


図 11.3 曲げ負荷を受けるはり
(モーメントのつり合い)

11.4 「はりの曲げ」の解法

① 支持反力の算出:はり全体の力とモーメントのつり合いから

② はり内部のせん断力分布の算出:負荷形式によって決まる領域毎での力のつり合いから、

③ 〃 の曲げモーメント分布の算出:領域毎のモーメントのつり合いから。

④ 曲げ応力の算出:③の曲げモーメント分布式と、はりの形状から、

[⑤ たわみの算出:③の曲げモーメント分布式の積分から。]

11.5 ①支持反力の算出

●両端を支えられ任意の位置にて横荷重を受けるはり（両端支持はり）の場合

・このはりにおける力およびモーメントのつり合いから，支持反力 $R_{(A)}$, $R_{(B)}$ を求める.

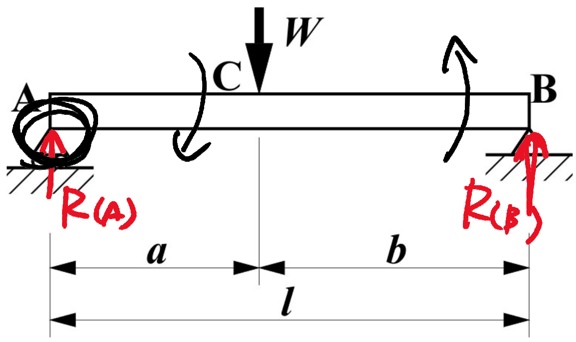


図 11.4 両端支持はり

・力のつり合い式[下向きの力:(+), 上向きの力:(−)]

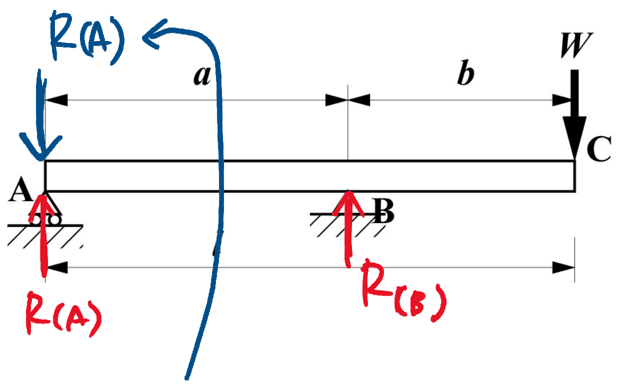
$$W - R_{(A)} - R_{(B)} = 0$$

・モーメントのつりあい式[反時計回り:(+), 時計回り:(−)]

A点回りを考えて, $-Wa + R_{(B)}\,l = 0$

$$\therefore R_{(A)} = \frac{b}{l}W, \quad R_{(B)} = \frac{a}{l}W$$

・例題: 以下の両端支持はりの支持反力 $R_{(A)}$ および $R_{(B)}$ を求めよ.



当初の $R_{(A)}$ の想定した向きが逆だったことを示す.

左図のような支持反力を想定して式をたてる.

・力のつり合い:

$$W - R_{(A)} - R_{(B)} = 0$$

・モーメントのつり合い: (A点まわり)

$$R_{(B)}\cdot a - W\cdot l = 0$$

$$R_{(A)} = -\frac{Wb}{a} \longleftarrow R_{(B)} = \frac{Wl}{a}$$

11.5　第 11 回講義に関する意見・感想・質問のまとめ

●意見

・支持反力の求め方を理解できた，モーメントは好きな分野なのですぐ理解できた，高校物理と似た内容で理解しやすかった，言葉として理解しながら勉強したので手応えがある，今までの講義の知識がつながってきていると感じた：22

・復習する，モーメントの計算を復習する，授業で理解が追いつかないところを復習する，支持反力の向きを間違えないようにする，新しい用語や考え方を間違えないようにする，つり合いの式で符号を間違えないようにする，：12←つり合いの式の符号については，必ずしも授業で述べた通りでなくても大丈夫で，少なくとも式の中で矛盾がないよう符号がついていればいいです．

・小テストが良かった，解答が合っているか不安，語句問題もしっかり解けた，復習の成果が出て嬉しい，断面積を間違えてしまった，単位や有効数字に気をつけて小テストを解けた，断面積の計算が少し不安，小テストの数値が例題と同じだったのでスムーズに解けた，小テストに力を入れる，計算機の使い方を見直しておいて良かった：12←今日の小テストは，平均 7.8 点，満点 20 名でした．有効数字が適切でない人がある程度いて減点対象でした．

・あまりモーメントを使用することがなかったのでほとんど抜け落ちている，モーメントの計算法を忘れていた，高校時代モーメントはあまり得意ではなかった：6

・材料力学やモーメントを再確認できた，材料科学なのに材料力学を学べないのが残念だったが今日一部学べて嬉しかった，材料力学の本質的部分を知ることができ興味をひかれた，はりの曲げの解法について懐かしく感じた：5

・例題を解けてよかった，はりが長い方が応力が高そうなのは想像がついた：2

・曲げ荷重がイメージしやすかった，曲げと引張の考え方の違いを学べた：2

・定期試験まで 2 週間ちょっとなのでこれまでの確認をする：2←気が付けば・・・ですね．

・小テストで幅と厚さを試験片の向きでどう取るか悩んだ←そもそも勘違いしてるのでは？シャルピー衝撃値の計算で必要な断面積は「切欠き部の断面積」ですので，試験片の向きをどう取ろうが問題で与えている通り $5.00 \times 10.00\ \mathrm{mm}^2$ になります（計算内では m^2 にします）

・とても眠くて睡魔との戦いだった←体調管理の問題ですかね．

・せん断応力らへんの理解が難しかった

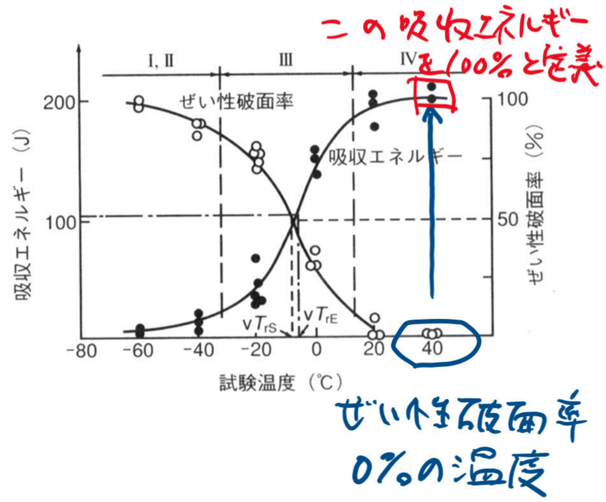
・仮想的な切断を左端に限りなく近づければ元の式に戻る

●質問

・先週の「fcc では遷移現象が起きない」の質問について，fcc ではエネルギー的に転位運動がしやすい＝塑性変形がしやすい＝ぜい性破壊しにくい，という理解で合っているか？←合っていますが，補足するなら「fcc では熱活性過程の助けを借りなくてもエネルギー的に転位運動がしやすい」ということです．

・曲げ荷重の力のつり合いにおいて，F と W，あるいは F と R は同一直線上にないため一番最初の R と W の関係と変わらないのでは？←力のつり合いに関しては元々その通りです．

・前回の復習で思ったが「ぜい性破面率が 0%となる温度における吸収エネルギーを 100%とする」という温度がどこかわからない←右図の通りです．



11.6 第 10 回小テスト解答

Q.1 衝撃試験について述べた次の文章中の空欄に当てはまる語句を記入せよ. [各 1 点]

衝撃試験は材料の[①]を評価するための材料特性試験であり, 代表的なものとしてシャルピー衝撃試験がある. 試験片の破断に要したエネルギーを「衝撃吸収エネルギー, E」として定義する. E の定義式は, ハンマ重量 W, ハンマ重心までの距離 R, 試験前のハンマ持上げ角 α, 試験後のハンマ振り上がり角 β とすると次式で表される.

E = WR([②]ー[③]) [J]

また, 単位面積当たりの衝撃吸収エネルギーとして「シャルピー衝撃値, C」を次式で定義する.

C＝E／切欠き部の[④] [J/m^2]

A.1

①[じん性(「粘り強さ」でも可)]　②[$\cos\beta$]

③[$\cos\alpha$]　④[断面積]

Q.2 焼入れした構造用炭素鋼 S45C 試験片(5 号試験片, 幅 10.00 mm×切欠き部厚さ 5.00 mm)にシャルピー衝撃試験を行ったところ, β = 138.1°であった. W = 38.84 kgf, R = 0.725 m, α = 141.0°のときの材料のシャルピー衝撃値 C を求めよ. [6 点]

A.2

$E = WR(\cos\beta - \cos\alpha) = (38.84 \times 9.807) \cdot 0.725(\cos 138.1 - \cos 141.0) = 9.067... \text{ J}$

[この計算の有効数字は 3 桁だが, 丸め誤差回避のため 4 桁目も記載]

$A = 5.00 \times 10.00 = 50.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2$

$\therefore\ C = E/A = 1.81 \times 10^5 \text{ J/m}^2$