材料評価学　第 6 回

前回：　引張試験における
- 理想破壊強度
- 破壊強度と表面エネルギー
- 強度を低下させる因子

今回：　引張試験における
- 応力集中
- Griffith の破壊モデル
- 弾性ひずみエネルギー

6.　引張試験 5

6.1　応力集中

●「応力集中」とは？

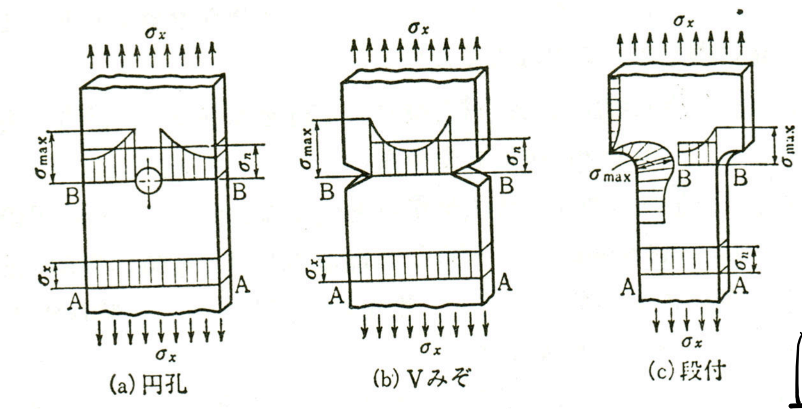


図 6.1　切欠き

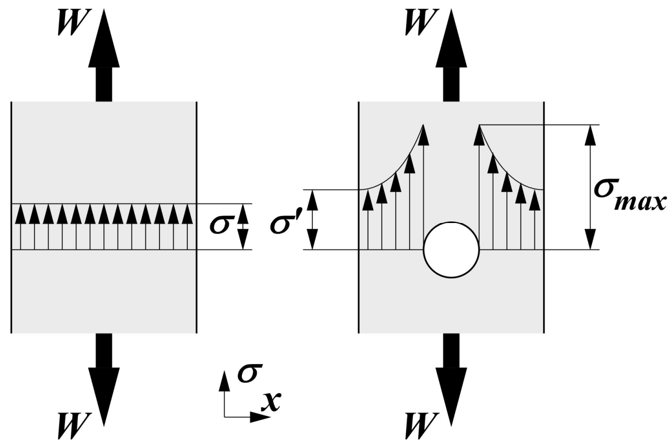


図 6.2　応力集中の概念

・形状が一様な材料中の応力分布：均一

・形状が一様ではない箇所（例：穴、溝、段付、等…総称して「切欠き」）

→断面積の減少，切欠き部では平均的応力としても上昇する

→切欠き部近傍における特異的応力上昇…「応力集中」

●**応力集中係数**：$\alpha = \dfrac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$

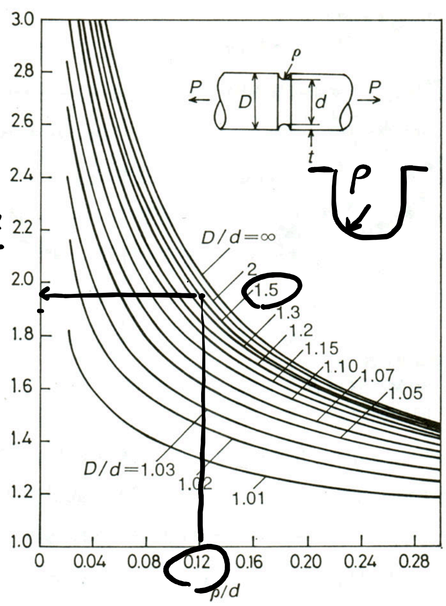
σ_{max} → 切欠き部における最大応力

σ_n → 切欠き部における断面積から求めた平均的応力

・α：負荷形式が同じであれば部材の形状により決まる（相似則が成り立つ）

例題：D＝15.0 mm, d＝10.0 mm で引張負荷 W＝100.0 kgf を受ける段付き丸棒に ρ＝1.20 mm の切欠きがある場合，切欠き近傍での最大応力 σ_{max} を求めよ.

ρ：曲率半径



$W = 100.0\ \mathrm{kgf} = 100.0 \times 9.807\ \mathrm{N}$

$D/d = 1.50 \qquad \rho/d = 0.120$

$\sigma_n = \dfrac{4W}{\pi d^2}, \quad \alpha = \dfrac{\sigma_{max}}{\sigma_n} \rightarrow \sigma_{max} = \alpha \cdot \dfrac{4W}{\pi d^2}$

$\mathrm{N/mm^2} \rightarrow \mathrm{MPa}$

（続き） $\alpha = 1.95$, $\sigma_{max} = \underline{24.4\ \mathrm{MPa}}$

6.2 Griffith の破壊モデル

● 「き裂」とは？： 切欠きの曲率半径が0とみなせるもの

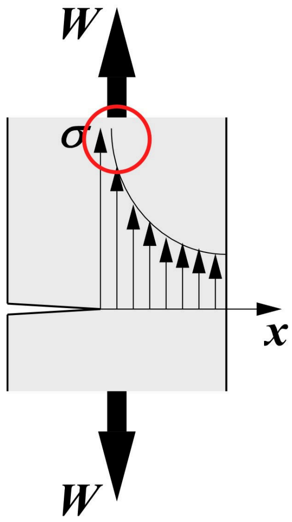


図 6.4 き裂

切欠き部の応力が無限大となってしまうため
応力集中の考え方だけでは評価ができない

・き裂を有する部材の破壊強度を
どう取り扱うか？
↓
Griffithの破壊モデル

●Griffith の破壊モデル

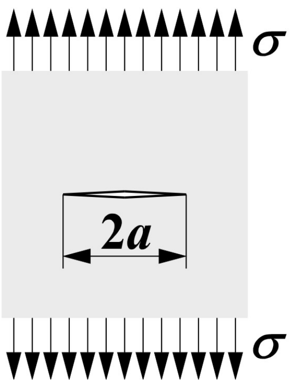


図 6.5 Griffith の破壊モデル

仮定:・長さ2aのき裂を有する無限平板
き裂寸法に対して十分な大きさをもつ

・部材は完全ぜい性体（=塑性変形は考慮しない）

・き裂に対して一様な垂直応力が作用する

・部材厚さは単位厚さとする。

●**弾性ひずみエネルギー：** 弾性変形(=外力による可逆的仕事)により材料内部に蓄えられるエネルギー

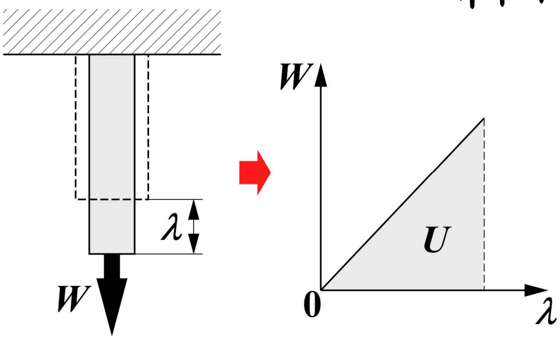


図 6.6 弾性ひずみエネルギー

・外力による仕事 ：$U=\int W d\lambda$, $W=k\lambda$ より

$$=\int k\lambda\, d\lambda = \frac{k\lambda^2}{2}$$

・外力による仕事を応力とひずみで表す

$$U = Al\cdot \underbrace{u}_{} \ , \quad u = \int \sigma\, d\varepsilon = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E\varepsilon^2}{2}$$

単位体積あたりの
弾性ひずみエネルギー

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon}$$

●**き裂を有する部材における弾性ひずみエネルギー：**
き裂長さに依存する
(き裂長さが長い方が変形しやすい
→蓄えられるエネルギーが少ない)

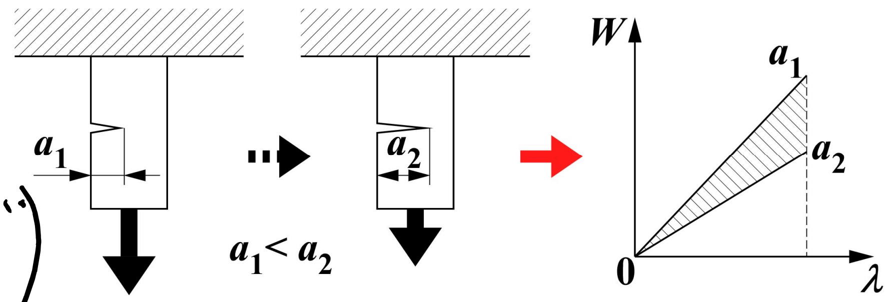


図 6.7 き裂材における弾性ひずみエネルギー

き裂長さが a_1 から a_2 に変化した場合 ($a_1 < a_2$)
→蓄えきれなくなった弾性ひずみエネルギー(上図斜線部)が解放される。

● 「解放される弾性ひずみエネルギー」≧「き裂進展に必要な表面エネルギー」の関係が成り立つ場合、き裂が進展する。
→ぜい性体なので破壊に至る。

$$\frac{dU}{da} \geq \frac{dT}{da}$$

●解放される弾性ひずみエネルギーの増分：$\frac{dU}{da}$

U：解放される弾性ひずみエネルギー

$u = \frac{\sigma^2}{2E}$, $U = u \cdot 2\pi a^2 = \frac{\pi a^2 \sigma^2}{E} \rightarrow \frac{dU}{da} = \frac{2\pi a \sigma^2}{E}$

●き裂進展に必要な表面エネルギーの増分：$\frac{dT}{da}$

T：表面エネルギー

γ：単位面積あたりのT

$T = 2a \times \gamma \times 2$
$= 4a\gamma \longrightarrow \frac{dT}{da} = 4\gamma$

$\frac{2\pi a \sigma^2}{E} \geqq 4\gamma \longrightarrow 2a \geqq \frac{4\gamma E}{\pi \sigma^2}$ ぜい性破壊する限界き裂長さを示す式.

$\hookrightarrow \sigma \geqq \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi a}}$

・き裂を有する完全ぜい性体の破壊条件

例題：ぜい性体である溶融石英（γ = 4.30 J/m^2, E = 70.0 GPa）で 2a＝0.100 mm のき裂が含まれている場合，ぜい性破壊する応力を求めると？また組織を改善することでき裂寸法を 2a＝0.0100 mm まで小さくした場合，破壊応力はどの程度上昇するか求めよ.

• $2a = 0.100\,\mathrm{mm} = \frac{0.100}{2} \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$, $\gamma = 4.30\,\mathrm{J/m^2} = 4.30\,\mathrm{N \cdot m}$

$E = 70.0\,\mathrm{GPa} = 70.0 \times 10^9\,\mathrm{N/m^2}$

$\therefore \sigma \geqq \sqrt{\frac{2 \cdot 4.30 \cdot 70.0 \times 10^9}{\pi \cdot 0.100/2 \times 10^{-3}}} = 6.1906 \cdots \times 10^7\,\mathrm{N/m^2} = 61.9\,\mathrm{MPa}$

• $2a = \frac{0.0100}{2} \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$, 他は同じ

$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{2 \cdot 4.30 \cdot 70.0 \times 10^9}{\pi \cdot 0.0100/2 \times 10^3}} = 1.9576 \cdots \times 10^8\,\mathrm{N/m^2} = 196\,\mathrm{MPa}$

6.3　第 6 回講義に関する意見･感想･質問のまとめ

●意見・感想

・式の導出を復習したい，前回までの復習を並行して行う，き裂という新しいことを復習して身につける，小テストの復習をする，復習をしっかりする，これまでの内容と結びつけながら理解する，Griffith のモデルを覚える，定義や用語や考えなどをしっかり整理する:25

・小テストで式の導出をしっかり勉強できていなかった，今回の小テストは式の意味を理解しながら復習していたので簡単だった，小テストをいつもより解けた，小テストの内容の理解が浅かった，今回の小テストは難しかった，小テストの解答で一部忘れていたものがあった，小テストに向けて用語の関連性を考えながら勉強したが公式の流れは理解しきれていなかった，久しぶりに小テストをまともに解けた，小テストは 1 つしか答えが合っていなかった，小テストは全て解けた:12←今回の小テストは平均 7.4 点，満点 17 名でした．式の導出に関しては，丸暗記しなくとも流れや意味が理解できていれば解ける問題だったはずです．

・今回の授業は内容が少し難しかった，どんどん新しい単語や式が出てくる，ひずみとか応力とかき裂とか同じようで違う項目ばかり，応力集中の理解がまだできていない部分がある，内容が少しずつ難しくなってきている，つながりがあるものが増えてきて面白いと感じる反面理解するのに時間がかかる，き裂進展の部分が難しい:12

・応力集中やき裂について例題を通して理解できた，き裂を持つ材料の変形の過程や力の働きがわかった，Griffith のモデルのイメージをつけることができた，き裂がある場合の強度を考えることができた，曲率半径が小さくなると応力集中計数が一気に大きくなるという説明でき裂のイメージを早く掴めた，式の導出で Griffith の破壊モデルを理解することができた，問題なく理解できた:8

・応力の発展を十分理解すべき，式の導出での前提の意味を正しく理解したい，式をただ覚えるのではなく導出する過程を覚えたい，σn を D か d で求めるのかで迷ってしまったので定義から確認する，Griffith の破壊モデルについて理解を深めたい:5

・初めて発言したが単位まで考えて満点を取りたい，計算問題で僕も単位を迷ってしまうことがある:2←勇気を出して初発言してくれて良かったと思います．まぁ単位に関しては今後もついて回る問題ですので，計算の途中でも常に単位を意識しながら計算する癖をつけてください．

・例題の 2 つとも計算が合わなかったので見直す，前半の例題で読み取る曲線を間違えてしまった:2

・前回欠席してしまい進度に追いついていないと感じた←毎回数人の欠席がありますが，前回授業の復習が出来る体制になっているはずですので web を有効活用してください．

・例題でπを電卓そのままで入れてしまい計算がおかしくなったのでπの有効数字に気をつけたい←これは勘違いかと思います，電卓のπボタンはより桁数の多いπの値になっている＝より精度が高いですから，そのせいで計算がおかしくなることはありえません．前から言ってますが，πに関しては電卓等でより桁数の多い値が手間なく使えるならそれを使ってください．

●質問

・前回講義で「σth／τth>>1 が延性固体」と説明されていたがその理由が分からなかった←σth／τth>>1 ということはσth の方がτth より著しく高い，ということです．そしてこれらはいずれも破壊強度（＝材料中に発生している応力がその値に達すると破壊が生じる），所謂「破壊が発生する下限値」ですから，下限値が低い方がより到達しやすいことになります．そして上記の場合σth の方がτth より著しく高い，つまりτth の方がσth より著しく低いということですから，へき開破壊より延性破壊の方が発生しやすいことを表しており，それは延性固体である，ということです．

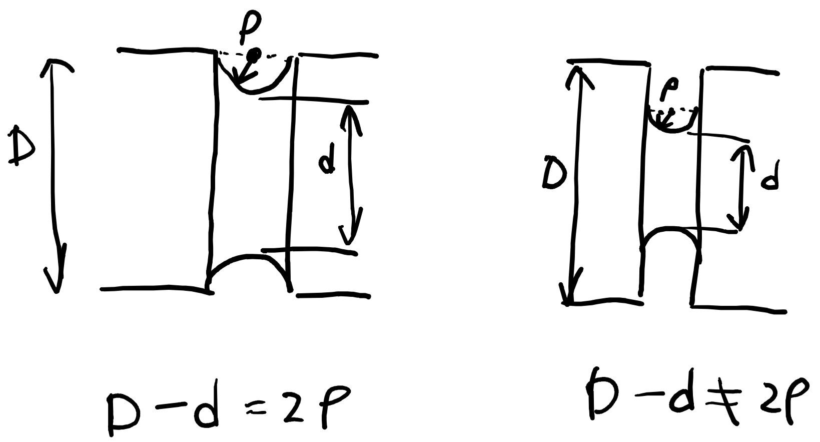
・他の切欠きでの最大応力の求め方が気になった←様々な形式の切欠き毎に，今回の例題のような応力

集中係数と各パラメータとの関係が求められてデータベース化されており，それを利用すれば部材寸法に関わらずαを求めることができます．

・エネルギー変換は他のエネルギー（音など）にもなるのか←厳密にはその通りです，破壊現象（き裂の発生や進展，破断）に伴い発生するエネルギーの一部は「弾性波」として材料内部を伝播します．それを検知するセンサーもあり，それによって破壊を早期検出する技術として利用されています．

・$T=2a\times\gamma\times2$ となる理由が理解しきれなかった←き裂長さが $2a$，そのき裂に伴う表面エネルギーをγ（γは単位面積あたりの T ですが，き裂長さ $2a\times$単位厚さ 1 のため面積となります），き裂面は必ず一対のためさらに 2 倍して，上記の関係となります．

・曲率半径の概念が難しかった（$D-d=\rho$ではないのか？）←下図のように，丸棒直径と切欠きの曲率半径は必ずしも関係があるわけではありません．純粋に切欠き先端の鋭さを表しているのがρです．



6.4 第 5 回小テスト解答

Q.1 次の文章および数式の空欄に当てはまる語句を記入せよ. [各 2 点]

理想へき開破壊強度は微視的[(a)]破壊と関連づけられる. へき開面をはさむ最近接原子間の応力σを, 原子間の[(b)]と斥力の作用の和としてモデル化すると, σと原子間距離の変化分 x の関係は sin 関数を用いて次のように近似できる.

$$\sigma = \sigma_{th} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cdots ①$$

ここで, x が微小な範囲では応力とひずみは[(c)]するため, ①式における $x = 0$ 近傍の傾きは次式で表される.

$$\left.\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right|_{x=0} = [\ \text{(d)}\ ] \cdots ②$$

また, x を用いてひずみεは次式のように表される.

$$\varepsilon = \frac{x}{C_0} \cdots ③$$

よって, ③式を①式に代入した上で②式に適用することで, 次式④が得られる.

$$\left.\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left[\sigma_{th} \cdot \frac{2\pi C_0}{\lambda} \cdot \cos\frac{2\pi C_0 \varepsilon}{\lambda}\right]_{\varepsilon=0} = E$$

$$\therefore \sigma_{th} = [\ \text{(e)}\ ] \cdots ④$$

A.1

(a)[ぜい性] (b)[引力]

(c)[比例] (d)[E or ヤング率]

(e)[$\frac{E\lambda}{2\pi C_0}$ or $\frac{E}{2\pi}$]