基礎数理 AI

(第 1 回 2021 年 6 月 11 日)

一般的注意. 新型コロナウイルス感染対策として, 本授業は遠隔で開講する．基本的には, このノートとテキストを読んで, ほぼ毎回の小レポートの提出 (計 60 点満点), および中間・期末レポート (各 20 点満点) で評価する．また, Zoom を使った授業映像の配信を行うが, ネットワーク環境を持たない受講者に不利にならないように, ノートとテキストを読むだけで完結するように配慮する．なお, 遠隔授業の前にノートとテキストを読み込んでいることを前提とする．何も準備せずに聴講しても, 恐らく意味が分からないであろう．ノートは本番の前の授業日を目処に公開する．質問は, 遠隔授業の休憩時間と授業後にチャット機能で受け付ける．また, メール ⟨masakazu@eng.niigata-u.ac.jp⟩ でも随時受け付ける．「ノートの〇ページ上から〇行」「テキストの P 〇 下から〇行辺りの式」などと併記して質問してもらえれば回答しやすい．ノートの右上には対応するテキストのページを記載した．なお, テキストはシラバスの通り

- 高橋泰嗣, 加藤幹雄, 微分積分概論, サイエンス社, 2013

を用いる．テキストの内容で, このノートに改めて記載しないものもある．テキストも併せて読んで勉強することを勧める．テキストの演習問題の他, シラバスに記載した他の参考文献も理解の助けになる．なお, このノートの「コラム」は授業の本筋ではないので読み飛ばしても差し支えない．

レポート提出方法. 学務システムを経由して提出する．スマホやタブレットで撮影したもので十分．ただし, 読めることを確認すること．ファイル名は, 在籍番号の前に授業の回数と a1 を記す．例えば第 7 回授業のレポートの場合「7a1t21x666a.jpg」「7a1t21y777b.pdf」等とすること．(従わなくとも罰則はありませんが, 集計漏れが生じる危険があります)．PC で作成・提出する場合はウイルス対策を取ること．この方法での提出が難しい場合はメールで相談すること．

中間・期末レポート. 授業の曜限 (火・金 3 限) にオンライン試験の要領で実施する．現在想定している流れとしては, 3 限開始の頃に学務システムで問題を公開 ⇒3 限終了の頃までに学務システムにレポートの画像を提出する．資料の持ち込みは可[1]で, 60 分程度で解ける問題を選ぶ．詳細は時期が近づいてから改めて連絡するが, ネットワーク等の環境が成績に不利に働かないように配慮する．

1. 極限と連続

まず, 授業で使う記号を準備する．

$\mathbb{R}$　real numbers(実数) の全体

$\mathbb{C}$　complex numbers(複素数) の全体．$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ が成り立つ．

なお, ある集合 A が別の集合 B に含まれるとき $A \subset B$ と書く．例えば $\{2,4,6,8,10\} \subset \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$．$A \subset B$ とは,「$a \in A \Rightarrow a \in B$」が成り立つと言うこと．$a \in A$ を集合 A の元, または成分という．例えば π は実数であるから $\mathbb{R}$ の元である．[2]

---

[1]「不可」としても取り締まりは不可能なので

[2]つまり $\pi \in \mathbb{R}$

リモート講義での工夫点

基礎数理 AI を中心として（山本 征法先生）

（工夫した点の多くは複数の教員からヒントを参考にした）

予習資料

オンライン授業の後に、次の授業の内容および宿題を学務システムにアップロード

=> 学生は事前に授業ノートを読み込んでからオンライン授業に臨む。

添付ノートは完成版で、学生に公開するときは授業ごとにページが増える。

(第 1 回授業ノートは全 6 ページ、第 2 回授業ノートは全 12 ページで 7 ページ以降が該当箇所)

授業記録の配信

オンライン授業は Zoom のリアルタイム配信であるが、映像を 1 週間程度 YouTube にも掲載した。これは、元々ノートを取りながら話を聞くのが苦手な学生も居るので、授業ノートと YouTube 映像で内容を繰り返し確認できるようにした。

授業ノートには授業の全内容が記されているので、ノートを取らなくても復習が可能。

宿題は次の授業日の 23:59 が締切で、学務システムに提出させる。

レポートの評価

対面式授業では適宜コメントを入れて返却していたが、現状では解答例の最後に一般的な注意として呼びかけるほかない。学習効果としては不十分かもしれない。

板書

強調部分の色分けだけではなく、赤い文字は四角で、青い文字は丸で囲むなど、形でも認識できるようにしている。これは、色覚に個人差があることと、画面を通すと色が見えにくくなることへの対応。

授業中の質問

授業の途中に休憩時間を設定し、そこで質問を受け付けている。質問への対応が済んでから後半の授業を再開する。質問がなければ 3 分後に再開する。

さらに、授業終了後 一定時間は Zoom ミーティングを開いておいて、そこでも質問対応する。なお、質問対応の時間中は録画を停止する（録画されているとなると、質問を躊躇する学生も居るだろうから)。

質問はチャット機能、または音声で受け付けている。

オンライン授業だと、対面授業と比較して質問しやすいという意見もある。

それでもタームが進む毎に質問は少なくなってゆく。

質問しやすい雰囲気にする工夫として、「分からないところがあったら、同じ所で何人も躓

いているはず
=> 誰かが率先して質問することで、全員が助かって授業の質も上がる」と言ったことを呼びかけている。

機器について

bluetooth のヘッドセット(Blue Parrot)を使用している。
PC や web カメラに内蔵のマイクでは、ホワイトボードを向いた瞬間に音声が聞き取りづらいようだ。
カメラの位置が低いとホワイトボードに蛍光灯の光が映り込んでしまうので、三脚に web カメラをガムテープで固定して使っている。

アンケートに対する学生の回答

1:資料の事前配布など予習に役立った科目の科目名と役立った内容, 感想を教えて下さい。
・基礎数理 B：授業で行う内容を一回行うことで理解が深まった。
・基礎数理 B： あらかじめわからないところに目星をつけられる
・基礎数理 A1、基礎数理 B：授業内容のノート（レジュメ）を事前に配布され、授業の予習がしやすかった。授業内ではノートの解説を詳しく解説してくれたため、自分の予習とリンクさせやすい授業だった。
・数学：配布された資料に目を通しておけばどこが分からないのかはっきりするので、そこの説明により集中して聴講できた。
・基礎数理：詳しく説明があり、例題もあったから
・基礎数理：[内容] 例題・問題の量が十分だったこと[感想] 内容により困難な場合もあると思うが、具体的な問題への解答を予習とすると、講義内容について調べることを予習とするより、予習への意欲が高くなり、また学生自身が客観的に予習段階での理解度を把握できると思う。

3:ノイズが少なく，音声（音響）が明瞭であった科目の科目名あるいは教員名を教えて下さい。
・5 名の学生が先生の講義を挙げました。

4:資料の提示方法がよかった科目の科目名と良かった点，感想を教えて下さい。
・基礎数理：分かりやすく、例題もあった

5:画面への書き込み（ホワイトボード，コメント）が効果的な科目の科目名と効果的な点，感想を教えて下さい。
・基礎数理　見やすく、進行スピードがよかった

・基礎数理 B マーカーペンを色分けしながら授業をしていて見やすかった

8 :復習を効果的に行えた科目の科目名と復習に効果的であった点，感想を教えて下さい。

・基礎数理 B 基礎有機化学：どちらも宿題が出されたので、家での学習も意欲的に取り組めた

・基礎数理 B、基礎有機化学前半。授業後に動画を視聴できたので理解できなかったところを繰り返し視聴することができた。

テキスト P72-79, 82

基礎数理 A1
(第 11 回 2021 年 7 月 20 日)

● **有理函数の積分.**

例. 不定積分

$$\int \frac{x-5}{x^2-x-2}dx$$

を求める.

$$\frac{x-5}{x^2-x-2} = \frac{x-5}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

とおいて両辺に $(x+1)(x-2)$ を掛けると $x-5 = A(x-2)+B(x+1)$. これがすべての x について成り立つためには $A+B=1,\ -2A+B=-5$. すなわち $A=2,\ B=-1$. したがって

$$\int \frac{x-5}{x^2-x-2}dx = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2}\right)dx = 2\log|x+1| - \log|x-2| + C$$
$$= \log\frac{|x+1|^2}{|x-2|} + C. \qquad \square$$

例. 不定積分

$$\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$$

を求める.

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

とすると ($\uparrow B$ の項がないとうまく分解出来ない),

$$1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A$$

であるから ($\uparrow$ 定数項・x の項・x^2 の項の係数を決めなければならない $\Rightarrow$ パラメータは 3 つ必要) $A+B = 2A+B+C = 0,\ A=1$. これを解くと $A=1,\ B=C=-1$. これより

$$\int \frac{dx}{x(x+1)^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \log\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + C. \qquad \square$$

例題. 不定積分

$$\int \frac{dx}{x^3-1}$$

を求める.[18]

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

とおいて両辺に $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ を掛けると

$$1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1) = (A+B)x^2 + (A-B+C)x + A - C.$$

[18] 分母を因数分解出来ないので困るパターン

係数を比較すると $A+B=A-B+C=0,\ A-C=1$. これを解けば $A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3},\ C=-\frac{2}{3}$ であるから

$$\int\frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}\right)dx.$$

(↑第 1 項の積分は容易. 第 2 項は「$\frac{(分母)'}{分母}$ + 余り」の形にする) ここで

$$\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}.$$

さらに $\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})=y$ とおくと

$$\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\int\frac{dx}{\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dy}{y^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan y+C$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

以上から

$$\int\frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\log|x-1|-\frac{1}{6}\log(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C. \qquad \square$$

• $R(x,\sqrt{x^2+Ax+B})$ **の積分.** $\sqrt{x^2+Ax+B}=t-x$ とおく.

例. 不定積分

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

を求める. $\sqrt{x^2+1}=t-x$ とおいて両辺の平方を取れば $x^2+1=t^2-2tx+x^2$.

$$\therefore x=\frac{t^2-1}{2t},\qquad dx=\frac{t^2+1}{2t^2}dt.$$

また

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{t-x}=\frac{1}{t-\frac{t^2-1}{2t}}=\frac{2t}{t^2+1}.$$

以上から

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{2t}{t^2+1}\frac{t^2+1}{2t^2}dt=\int\frac{dt}{t}=\log|t|+C=\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C. \qquad \square$$

• $R(\cos x,\sin x)$ **の積分.**

例. $\tan\frac{x}{2}=t$ とおくと

$$\int R(\cos x,\sin x)dx=\int R\big(\tfrac{1-t^2}{1+t^2},\tfrac{2t}{1+t^2}\big)\tfrac{2}{1+t^2}dt\Big|_{t=\tan\frac{x}{2}}.$$

実際 $\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2}$. また $\tan\frac{x}{2}=t$ の両辺を微分すると $\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=dt$. よって $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$.

例題. 次の不定積分を求めよ:

$$(1)\quad \int \frac{1}{x(x+2)^2}dx \qquad (2)\quad \int \frac{dx}{\sin x}$$

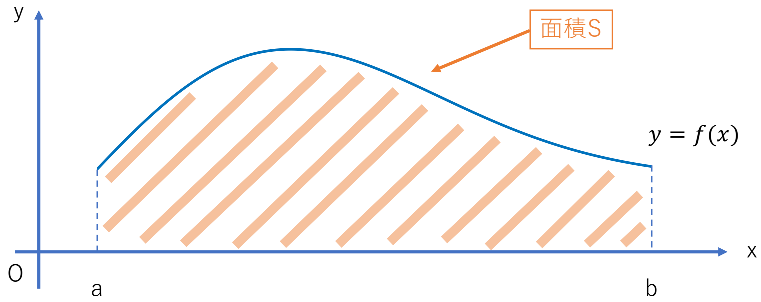
解答 (1). $\frac{1}{x(x+2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$ とおくと $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = -\frac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x+2)^2}dx &= \int \left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{4(x+2)} - \frac{1}{2(x+2)^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{x}{x+2}\right| + \frac{1}{2(x+2)} + C \quad (C : \text{積分定数}). \qquad \square\end{aligned}$$

解答 (2). $t = \tan\frac{x}{2}$ とおくと $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ であるから

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log\left|\tan\tfrac{x}{2}\right| + C \quad (C : \text{積分定数}). \qquad \square$$

3.2. **定積分.** $f \in C[a,b]$, $f(x) \geq 0$ としたとき, $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ のグラフと x 軸に挟まれる部分の面積 S を求める.



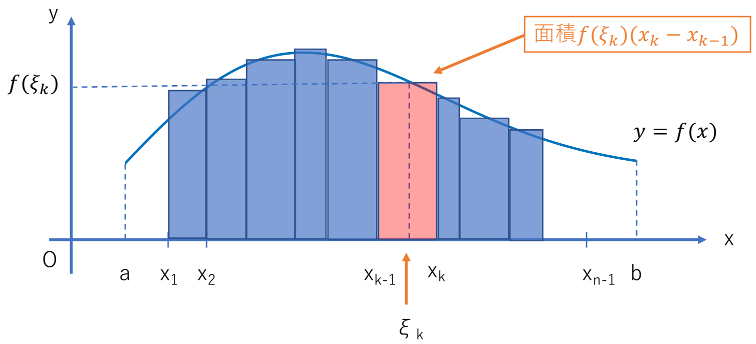
区間 $[a,b]$ を

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

と分割する. (区間をいくつに分割するか. $x_1, \ldots, x_n$ をどこに配置するか. これらの分割の情報がすべて記号 Δ に格納されていると考える). また

$$|\Delta| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_{k-1}|$$

とし, [19]小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ に点 ξ_k を任意に取る.



$y = f(x)$ のグラフを棒グラフで近似する

[19]小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ のなかで一番幅が広いのはどこ?

このとき
$$S(\Delta)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$
を **Riemann 和**[20]という．Riemann 和は S を棒グラフの面積で近似したものと見なせる．このとき, $[a,b]$ の分割を細かくするほど, 棒グラフは $y=f(x)$ のグラフに近づくので, $S(\Delta)$ も S に近づくことが期待される．実際に極限を取った
$$\lim_{|\Delta|\to 0} S(\Delta)$$
を, $f(x)$ の $[a,b]$ における定積分あるいは Riemann 積分といい
$$\int_a^b f(x)dx$$
と書く．$f\in C[a,b]$ のとき, 定積分は一意に定まることが知られている．さらに
$$S=\int_a^b f(x)dx$$
である．つまり, 定積分とは, 函数のグラフと x 軸の間の面積である．ただし $f(x)<0$ のときは, この面積も負の値をとる．なお, 不定積分と異なり定積分の積分変数は何でも良い．つまり
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(\theta)d\theta.$$
ただし
$$\int_a^b f(n)dn,\quad \int_a^b f(C)dC$$
などは趣味が良くないかもしれない．

コラム (長い S). Riemann 和は面積の「和」であるから $\sum_{\Delta}$ で表される．Σ はローマ字の S に相当するギリシャ文字であるが, この文字で和を表すのは sum(英語) や **S**umma(ドイツ語) に由来する．したがって Riemann 和の極限である定積分を表すにも S を用いるのが妥当であるが, そこで選ばれたのが長い S, つまり $\int$ である．[21]なお, この長い S は今でもドイツの地ビールのラベルや店の看板などに見られる．

$f(x)$ の原始函数を $F(x)$ としたとき
$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$
が成り立つ．この性質を微分積分学の基本定理という．右辺を
$$[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$
と書くことがある．$G(x)$ を別の原始函数としたとき $G(x)=F(x)+C$ なる定数 C が存在するのであった．よって
$$G(b)-G(a)=F(b)+C-F(a)-C=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx.$$
つまり, 基本定理においては, どの原始函数を選んでも構わない．

---

[20] リーマン．1826-1866．もちろん分割の仕方 Δ によって $S(\Delta)$ の値は変わる

[21] 恐らく導入したのは Leibniz である

なお, 原始関数や不定積分は定積分を計算するのに便利な道具として後から開発されたものである.「図形の面積を知りたい」という実用的な動機が当然先に存在するのである. また, 例えば $y = f(x)$ が位置 x における温度を表すならば, 区間 $[a, b]$ に含まれる熱は定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を計算すれば求まる.[22] 一方, この場合は不定積分 $\int f(x)dx$ は何の意味も持たない. 実用上の意味を持つのは定積分であり, 不定積分はそれを計算するための道具に過ぎない.

例. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ であるから

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos \tfrac{\pi}{2} + \cos 0 = 1. \qquad \square$$

補足. 定積分には積分定数は現れない. 例えば上の例で, 原始関数として $-\cos x + C$ を選ぶと

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x + C]_0^{\pi/2} = -\cos \tfrac{\pi}{2} + C + \cos 0 - C = 1$$

であり, 積分定数の影響が消える.

例. 定積分

$$\int_1^2 \log x dx$$

を求めよ.

解答. 不定積分すると

$$\int \log x dx = x(\log x - 1) + C$$

であるから

$$\int_1^2 \log x dx = [x(\log x - 1)]_1^2 = 2(\log 2 - 1) - 1(-1) = 2\log 2 - 1. \qquad \square$$

おまけ 1. $\frac{1}{x^3-8}$ の不定積分を求めよ.

解答. $\frac{1}{x^3-8} = \frac{a}{x-2} + \frac{bx+c}{x^2+2x+4}$ とすると $(a+b)x^2 + (2a-2b+c)x + 4a - 2c = 1$ であるから $a + b = 2a - 2b + c = 0,\ 4a - 2c = 1$. これを解くと $a = \frac{1}{12},\ b = -\frac{1}{12},\ c = -\frac{1}{3}$. よって

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3-8} &= \frac{1}{12}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{12}\int \frac{x+4}{x^2+2x+4}dx \\ &= \frac{1}{12}\log|x-2| - \frac{1}{24}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x+1)^2+3}.\end{aligned}$$

ここで $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx = \log|x^2+2x+4|$ であり, また

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2+3} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\frac{1}{3}(x+1)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan y = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan \frac{x+1}{\sqrt{3}}.$$

[22] 正確には定積分に比熱を掛けたものが熱

ただし $y=\frac{x+1}{\sqrt{3}}$ として置換積分を行った．以上から

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^3-8}=&\frac{1}{12}\log|x-2|-\frac{1}{24}\log\left|x^2+2x+4\right|-\frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C\\=&\frac{1}{24}\log\left|\frac{x^2-4x+4}{x^2+2x+4}\right|-\frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C\quad(C:\text{積分定数}).\qquad\square\end{aligned}$$

おまけ 2. 次の不定積分を求めよ:

$$(1)\quad\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2}}\qquad(2)\quad\int\frac{dx}{(1-\cos x)\sin x}$$

解答 (1). $t=x+\sqrt{x^2+2}$ とおくと $x=\frac{t^2-2}{2t},\ dx=\frac{t^2+2}{2t^2}dt,\ \sqrt{x^2+2}=\frac{t^2+2}{2t}$ であるから

$$\begin{aligned}&\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2}}=\int\frac{2t}{t^2-2}\frac{2t}{t^2+2}\frac{t^2+2}{2t^2}dt=\int\frac{2}{t^2-2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}}-\frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{x+\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{x+\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}}\right|+C\quad(C:\text{積分定数}).\qquad\square\end{aligned}$$

解答 (2). $t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと $\frac{1}{(1-\cos x)\sin x}=\frac{(1+t^2)^2}{4t^3},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ であるから

$$\int\frac{dx}{(1-\cos x)\sin x}=\int\frac{1+t^2}{2t^3}dt=-\frac{1}{4t^2}+\frac{1}{2}\log|t|+C.$$

したがって

$$\int\frac{dx}{(1-\cos x)\sin x}=-\frac{1}{4\tan^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.\qquad\square$$

別解 (2). $\frac{1}{(1-\cos x)\sin x}=\frac{1+\cos x}{(1-\cos^2 x)\sin x}=-\frac{1+\cos x}{\sin^4 x}(-\sin x)$ であるから, $\gamma=1+\cos x$ とおくと $-\sin x dx=d\gamma$. また $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-(\gamma-1)^2=\gamma(2-\gamma)$ であるから

$$\begin{aligned}&\int\frac{dx}{(1-\cos x)\sin x}=-\int\frac{\gamma}{\gamma^2(2-\gamma)^2}d\gamma=-\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{2-\gamma}+\frac{2}{(2-\gamma)^2}\right)d\gamma\\&=-\frac{1}{4}\left(\log\left|\frac{\gamma}{2-\gamma}\right|+\frac{2}{2-\gamma}\right)+C=\frac{1}{4}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}-\frac{1}{2(1-\cos x)}+C.\qquad\square\end{aligned}$$

補足. 上の 2 つの解は同じである．実際 $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{1-(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{1+(2\cos^2\frac{x}{2}-1)}=\tan^2\frac{x}{2}$ より $\frac{1}{2}\log|\tan\frac{x}{2}|=\frac{1}{4}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$. また $1-\cos x=2-2\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ より $\frac{1}{2(1-\cos x)}=\frac{1}{4\tan^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{4}$. 最後の $\frac{1}{4}$ は C に吸収させる．

問題 (第 11 回分). 次の定積分を求めよ：

$$(1)\quad\int_0^{\pi/4}e^x\sin x\cos x dx\qquad(2)\quad\int_0^{\pi/2}\sin^4 x dx$$

解答 (1). 加法定理と部分積分より

$$\int e^x \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}\int e^x \sin 2x dx = \frac{1}{2}e^x \sin 2x - \int e^x \cos 2x dx$$
$$= \frac{1}{2}e^x \sin 2x - e^x \cos 2x - 2\int e^x \sin 2x dx = \frac{1}{2}e^x \sin 2x - e^x \cos 2x - 4\int e^x \sin x \cos x dx$$

であるから

$$\int e^x \sin x \cos x dx = \frac{1}{5}e^x\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \cos 2x\right) + C.$$

これより

$$\int_0^{\pi/4} e^x \sin x \cos x dx = \left[\frac{1}{5}e^x\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \cos 2x\right)\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{10}e^{\pi/4} + \frac{1}{5}. \qquad \square$$

こんな解答がありました. $\int e^x \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}\int e^x \sin 2x dx$ の後, $(e^x \cos 2x)' = e^x \cos 2x - 2e^x \sin 2x$, $(e^x \sin 2x)' = e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x$ より $e^x \sin 2x = (\frac{1}{5}e^x \sin 2x - \frac{2}{5}e^x \cos 2x)'$. これより

$$\int_0^{\pi/4} e^x \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}e^x \sin 2x - \frac{2}{5}e^x \cos 2x\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{10}e^{\pi/4} + \frac{1}{5}. \qquad \square$$

解答 (2). 第 10 回ノートにある漸化式を用いても良いが, より直接的に

$$\int \sin^4 x dx = \int \sin^3 x(-\cos x)' dx = -\sin^3 x \cos x + 3\int \sin^2 x \cos^2 x dx$$
$$= -\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 2x dx = -\sin^3 x \cos x + \frac{3}{8}\int (1 - \cos 4x)\, dx.$$

これより原始函数として $-\sin^3 x \cos x + \frac{3}{8}x - \frac{3}{32}\sin 4x$ がとれる. よって

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx = \left[-\sin^3 x \cos x + \frac{3}{8}x - \frac{3}{32}\sin 4x\right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{16}.$$

補足. なお, 上の原始函数は第 10 回で求めたものと一致する. 実際 $\frac{3}{8}x$ の部分は同じなので三角函数の部分だけ比較すると

$$-\sin^3 x \cos x - \frac{3}{32}\sin 4x = -\sin^3 x \cos x - \frac{3}{16}\sin 2x \cos 2x$$
$$= -\sin^3 x \cos x - \frac{3}{8}\sin x \cos x\left(1 - 2\sin^2 x\right) = -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x - \frac{3}{8}\sin x \cos x.$$

別解 (2). 加法定理を繰り返し使えば $\sin^4 x = \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$ であるから

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx = \left[\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x\right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{16}. \qquad \square$$

注意. 定積分は定数です. 変数 x は残りません. (1) で $e^0 = 0$ や $\cos 0 = 0$ とした解答が散見されます. 慎重に計算しましょう.