新潟大学工学部

受験番号	解答例

令和７年度

新潟大学工学部第３年次編入学

学　　力　　試　　験

解答は各問とも必ずこの試験用紙に記入すること

試 験 科 目	専門基礎科目　　　　(数学)	1／3　頁

〔Ｉ〕実数$a>0$とするとき，以下のIの値が1となるaの値を求めよ。

$$I=\iint_D xy^2\,dx\,dy,\quad D=\{(x,y)|\,0\le x\le a, 0\le y\le 3e^x\}$$

(解答)

Iの式を求める。

$$I=\int_0^a dx\int_0^{3e^x} xy^2\,dy=\int_0^a\left[\frac{1}{3}xy^3\right]_{y=0}^{y=3e^x}dx=\int_0^a 9e^{3x}x\,dx$$

部分積分により

$$I=[3e^{3x}x]_0^a-\int_0^a 3e^{3x}\,dx=3e^{3a}a-[e^{3x}]_0^a=3ae^{3a}-e^{3a}+1=(3a-1)e^{3a}+1$$

ついで，$I=1$となるaを求める。

$$(3a-1)e^{3a}+1=1$$

$$(3a-1)e^{3a}=0$$

aは実数だから，常に$e^{3a}>0$となる。従って，上式が成り立つのは

$$3a-1=0$$

よって

$$a=\frac{1}{3}$$

このaの値は，$a>0$の条件を満たす。

受験番号	解答例

令和７年度

新潟大学工学部第３年次編入学

学　　力　　試　　験

解答は各問とも必ずこの試験用紙に記入すること

試験科目	専門基礎科目　　　(数学)	２／３頁

〔Ⅱ〕次の微分方程式を解け。

（１） $\dfrac{dy}{dx} = -\sin x \cdot \dfrac{\cos^2 y}{\cos^2 x}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}\cdot \cos^2 y = -\sec x \cdot \tan x \cdot \cos^2 y$$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = -\sec x \cdot \tan x \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = -\int \sec x \cdot \tan x \cdot dx$$

$$\tan y + C = -\sec x$$

$\sec x + \tan y = C$　　Ｃは積分定数

（２） $y'' - 3y' + 2y = 2x - 1$　　ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$　$y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$　である。

右辺を０とおいた同次方程式は,

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

この同次方程式の基本解は，$y_1 = e^x$，$y_2 = e^{2x}$ である。

同次方程式の基本解の組に対して，下記を満たすＡ，Ｂを求めると,

$$A' e^x + B' e^{2x} = 0 \qquad A' e^x + B' \cdot 2e^{2x} = 2x - 1$$

$$A' = (-2x + 1)e^{-x} \qquad B' = (2x - 1)\cdot e^{-2x}$$

$$A = \int A' dx = \int (-2x+1) e^{-x} dx = (2x+1)e^{-x} + C_1 \qquad B = \int B' dx = \int (2x-1)\cdot e^{-2x} dx = -xe^{-2x} + C_2$$

したがって，元の非同次方程式の特殊解は,

$$y = (2x+1)e^{-x}\cdot e^{x} - xe^{-2x}\cdot e^{2x} = x + 1$$

よって，求める一般解は,

$y = Ae^x + Be^{2x} + x + 1$　A,B は任意定数

受験番号	解答例

令和７年度

新潟大学工学部第３年次編入学

学　　力　　試　　験

解答は各問とも必ずこの試験用紙に記入すること

試験科目	専門基礎科目　　　（数学）	３／３頁

〔Ⅲ〕以下の問に答えよ。

（１）３次正方行列$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\3&2&3\end{pmatrix}$の行列式と逆行列を求めよ。

（２）３次元空間の中で単位ベクトル$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$で立方体$\Delta(A)$が定められるとする。このとき，３次正方行列$B=\begin{pmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{pmatrix}$で立方体$\Delta(A)$を線形変換したとき，線形変換後の平行六面体$\Delta(A')$の体積を求めよ。ただし，$a$, b, cは互いに相異であるとする。

（解答例）

（１）　行列式の計算は以下の通りである。

$$detA = det\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\3&2&3\end{pmatrix} = 1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot3+3\cdot1\cdot2-3\cdot2\cdot3-1\cdot1\cdot3-2\cdot2\cdot1=-7$$

逆行列の計算は以下の式で求めることができる。

$A^{-1}=\dfrac{1}{detA}\Delta_{ij}$ (Δ_{ij}は余因子であり，iは行，jは列を示す。)

各余因子の計算は以下の通りである。

$$\Delta_{11}=(-1)^{1+1}det\begin{pmatrix}2&2\\2&3\end{pmatrix}=1\cdot(2\cdot3-2\cdot2)=2$$

$$\Delta_{12}=(-1)^{1+2}det\begin{pmatrix}1&2\\3&3\end{pmatrix}=-1\cdot(1\cdot3-2\cdot3)=3$$

$$\Delta_{13}=(-1)^{1+3}det\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}=1\cdot(1\cdot2-2\cdot3)=-4$$

$$\Delta_{21}=(-1)^{2+1}det\begin{pmatrix}1&3\\2&3\end{pmatrix}=-1\cdot(1\cdot3-3\cdot2)=3$$

$$\Delta_{22}=(-1)^{2+2}det\begin{pmatrix}1&3\\3&3\end{pmatrix}=1\cdot(1\cdot3-3\cdot3)=-6$$

$$\Delta_{23}=(-1)^{2+3}det\begin{pmatrix}1&1\\3&2\end{pmatrix}=-1\cdot(1\cdot2-1\cdot3)=1$$

$$\Delta_{31}=(-1)^{3+1}det\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}=1\cdot(1\cdot2-3\cdot2)=-4$$

$\Delta_{32}= (-1)^{3+2} det\begin{pmatrix}1 & 3\\1 & 2\end{pmatrix} = -1\cdot(1\cdot 2-3\cdot 1) = 1$

$\Delta_{33}= (-1)^{3+3} det\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} = 1\cdot(1\cdot 2-1\cdot 1) = 1$

以上より逆行列A^{-1}は以下の通りである。

$$A^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\3 & -6 & 1\\-4 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

※逆行列は Gaussian-Jordan の消去法を用いて解くことも可能である.

（2）各単位ベクトル $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ は 3 次正方行列$B = \begin{pmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{pmatrix}$ で以下のように線形変換される。

$$\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2\\b^2\\c^2\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a^2\\b^2\\c^2\end{pmatrix}$ を三辺とする平行六面体$\Delta(A')$の体積を求める。

各単位ベクトル $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ で定められた立方体$\Delta(A)$を 3 次正方行列$B = \begin{pmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{pmatrix}$で線形変換することで$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a^2\\b^2\\c^2\end{pmatrix}$ を三辺とする平行六面体$\Delta(A')$となるため，この平行六面体$\Delta(A')$の体積は 3 次正方行列$B = \begin{pmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{pmatrix}$の行列式の絶対値で求めることができる。また，転置不変性$|A| = |A^t|$であることから以下であることが分かる。

$$\left|det\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{pmatrix}\right| = \left|det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\a & b & c\\a^2 & b^2 & c^2\end{pmatrix}\right|$$

この行列は Vandermonde の行列式であるため，Vandermonde の行列式は各行の公比の差積に等しいことを利用すると，以下の式で行列式を計算することができる。

$$detB = \prod_{1\le i<j\le 3}(x_j - x_i) = (-1)^{3(3-1)/2}\prod_{1\le i<j\le 3}(x_i - x_j)$$

$$\left|det\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{pmatrix}\right| = \left|det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\a & b & c\\a^2 & b^2 & c^2\end{pmatrix}\right| = |(b-a)(c-a)(c-b)|$$

(別解 1)

$\left|det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\a & b & c\\a^2 & b^2 & c^2\end{pmatrix}\right|$の計算は Sarrus の公式を用いても同様の結果を得ることができる。

$$|detB| = \left|det\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{pmatrix}\right| = \left|det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\a & b & c\\a^2 & b^2 & c^2\end{pmatrix}\right|$$

$$= |1\cdot b\cdot c^2 + 1\cdot c\cdot a^2 + 1\cdot a\cdot b^2 - 1\cdot b\cdot a^2 - 1\cdot a\cdot c^2 - 1\cdot c\cdot b^2|$$

$$= |(b-a)(c-a)(c-b)|$$

（別解 2）

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a^2\\b^2\\c^2\end{pmatrix}$ を三辺とする平行六面体$\Delta(A')$ の体積をベクトルの外積と内積を用いて求めた場合

次の三つのベクトルが成す平行六面体の体積を求める。

$$\vec{p}=\begin{pmatrix}p_x\\p_y\\p_z\end{pmatrix},\ \vec{q}=\begin{pmatrix}q_x\\q_y\\q_z\end{pmatrix},\ \vec{r}=\begin{pmatrix}r_x\\r_y\\r_z\end{pmatrix}$$

先ず，$\vec{p}$と$\vec{q}$がなす平行四辺形の面積は，これらのベクトルの外積の大きさであり

$$S=|\vec{p}\times\vec{q}|$$

次に，この平行四辺形を底面とした時の平行六面体の高さは，平行六面体の法線方向単位ベクトル$\vec{e}$と$\vec{r}$の内積であるため

$$H=|\vec{e}\cdot\vec{r}|=\left|\left(\frac{\vec{p}\times\vec{q}}{|\vec{p}\times\vec{q}|}\right)\cdot\vec{r}\right|=\frac{1}{|\vec{p}\times\vec{q}|}|(\vec{p}\times\vec{q})\cdot\vec{r}|$$

結局，平行六面体の体積は次のようになる。

$$V=SH=|\vec{p}\times\vec{q}|\frac{1}{|\vec{p}\times\vec{q}|}|(\vec{p}\times\vec{q})\cdot\vec{r}|=|(\vec{p}\times\vec{q})\cdot\vec{r}|$$

これを成分で書くと

$$V=\left|\begin{pmatrix}p_yq_z-p_zq_y\\p_zq_x-p_xq_z\\p_xq_y-p_yq_x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}r_x\\r_y\\r_z\end{pmatrix}\right|=|p_yq_zr_x-p_zq_yr_x+p_zq_xr_y-p_xq_zr_y+p_xq_yr_z-p_yq_xr_z|$$

これは行列

$$C=\begin{pmatrix}p_x&q_x&r_x\\p_y&q_y&r_y\\p_z&q_z&r_z\end{pmatrix}$$

の行列式の絶対値と等しいことが容易に証明できる。したがって

$$V=|(\vec{p}\times\vec{q})\cdot\vec{r}|=|\det C|$$

$\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}a^2\\b^2\\c^2\end{pmatrix}$とすれば

$$V=\det C=|1bc^2+1ca^2+1ab^2-1ba^2-1ac^2-1cb^2|$$

$$=|(b-a)(c-a)(c-b)|$$