

基礎数理 B 第 13 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

11 月 17 日

対角化

前回注意として $\dim V(\lambda)$ が全ての固有値 λ に対して固有方程式の解 λ の重複度と一致するときに良い例になるとだけ書いたが、この講義では、この良い例になる場合に対角化を行う。

A を n 次正方行列としてその固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とし、対応する固有ベクトルを $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ とする。

固有ベクトルを並べた $P = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ を行列の行列と思えば、 P は n 次正方行列で、良い例の場合、 $\text{rank } P = n$ になるため P^{-1} が存在する。

$E = P^{-1}P = P^{-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = (P^{-1}\mathbf{x}_1, P^{-1}\mathbf{x}_2, \dots, P^{-1}\mathbf{x}_n)$
より $P^{-1}\mathbf{x}_i = d_i$ (第 i 成分だけ 1 で他は 0 になるベクトル) と書けるので

対角化

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = P^{-1}(A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2, \dots, A\mathbf{x}_n) \\ &= P^{-1}(\lambda_1\mathbf{x}_1, \lambda_2\mathbf{x}_2, \dots, \lambda_n\mathbf{x}_n) \\ &= (\lambda_1 P^{-1}\mathbf{x}_1, \lambda_2 P^{-1}\mathbf{x}_2, \dots, \lambda_n P^{-1}\mathbf{x}_n) = (\lambda_1 d_1, \lambda_2 d_2, \dots, \lambda_n d_n) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と対角行列になる。

悪い例の場合、固有ベクトルの数が足りないため、 P がうまく作れず、 P^{-1} が存在するように、適当にベクトルを足してしまうと、後の計算がうまくいかない。(良いベクトルを足して計算を進める方法はジョルダン標準形の理論として教科書にはあるがこの授業では取り扱わない。)

対角化

定理 7.5

n 次正方行列 A に関して以下は同値

- (1) A は対角化可能
- (2) n 個の 1 次独立な A の固有ベクトルが存在する。
- (3) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ を A のすべての相異なる固有値とすると

$$n = \sum_{i=1}^r \dim V(\lambda_i)$$

定理 7.6

正方行列 A の固有値が全て相異なれば A は対角化可能

対角化

実際に対角化を行ってみるが、前回、前々回に固有値、固有ベクトルを計算しているものを使う。多くの場合は固有値、固有ベクトルだけを取り扱うことはなく、対角化を行い、さらに何らかの計算をするので、一連の計算として行うことが多い。

第 11 回に $A_{17} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ の固有値固有ベクトルを計算したが、

固有値は 1, 8 で対応する固有ベクトルは順に $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であった。

対角化

この固有ベクトルをこの順に並べて $P = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると、

$$P^{-1} = \frac{-1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \text{ になり}$$

$$P^{-1}A_{17}P = \frac{-1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

対角化

一方で、固有ベクトルを並べる順番を逆にして $P' = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

とすると $P'^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ になり

$$\begin{aligned} P'^{-1} A_{17} P' &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と対角化できる。

対角化してできた行列は異なるが、固有ベクトルを並べた順に固有値が並んでいることに注意する。

次回の授業で取り扱うが、この先の計算を考えた場合、対角化の違いにより、途中経過は異なるが、最終結果は同じになる (のどちらを対角化と呼んでも全く問題ない)。

対角化

第 12 回に計算が大変な例として $A_{16} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ を挙げたが、
この場合、

固有値 $\lambda = \frac{7 + \sqrt{129}}{2}$ に対応する固有ベクトルは
$$\begin{pmatrix} \frac{-(3 - \sqrt{129})}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有値 $\lambda = \frac{7 - \sqrt{129}}{2}$ に対応する固有ベクトルは
$$\begin{pmatrix} \frac{-(3 + \sqrt{129})}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$$

であった。

計算は大変になるが、続ける。

対角化

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-(3 - \sqrt{129})}{10} & \frac{-(3 + \sqrt{129})}{10} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{とすると}$$

$$P^{-1} = \frac{5}{\sqrt{129}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3 + \sqrt{129}}{10} \\ -1 & \frac{-(3 - \sqrt{129})}{10} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}A_{16}P = \begin{pmatrix} \frac{7 + \sqrt{129}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7 - \sqrt{129}}{2} \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

対角化

同様に第 12 回に固有値、固有ベクトルが、複素数になる例として $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ を挙げたが、この場合

固有値 $\lambda = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} \frac{3 + \sqrt{3}i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

固有値 $\lambda = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} \frac{3 - \sqrt{3}i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

であったが、同様に気にせず計算を進めると

対角化

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3 + \sqrt{3}i}{2} & \frac{3 - \sqrt{3}i}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ とすると、}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}i} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3 - \sqrt{3}i}{2} \\ -1 & \frac{3 + \sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} \text{ になり}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} \text{ と対角化できる。}$$

対角化

サイズが大きくなった例でも $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ に対して

固有値 $\lambda = -1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

固有値 $\lambda = -1$ (重根) に対応する固有ベクトルは

$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であった。

$P = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

対角化

$$(P \ E) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

と計算して $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ と対角化できる。}$$

問題

次の行列を対角化せよ

$$A_{15}, \quad A_{18}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

これらの行列の固有値、固有ベクトルはすでに前回、前々回のレポートとして計算している。これらの結果は使用 (参照) しても構わない。