

基礎数理 B 第 12 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

11 月 13 日

固有値・固有ベクトル

前回は計算が楽なものを選んだが、実際には次のような大変な計算になる方が多い。

$A_{16} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ の場合

$$\det(\lambda E - A_{16}) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -6 \\ -5 & \lambda - 5 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda - 2$$

これより固有値は $\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{129}}{2}$

固有値・固有ベクトル

固有値 $\lambda = \frac{7 + \sqrt{129}}{2}$ に対して

$$(1E - A_{16}) = \begin{pmatrix} \frac{3 + \sqrt{129}}{2} & -6 \\ -5 & \frac{-3 + \sqrt{129}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{3 + \sqrt{129}} \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-12}{3 + \sqrt{129}} \\ -5 & \frac{-3 + \sqrt{129}}{2} \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } \frac{-12}{3 + \sqrt{129}} &= \frac{-12(3 - \sqrt{129})}{(3 + \sqrt{129})(3 - \sqrt{129})} \\ &= \frac{-12(3 - \sqrt{129})}{-120} = \frac{3 - \sqrt{129}}{10} \end{aligned}$$

固有値・固有ベクトル

これより (*) から続けると

$$\xrightarrow{\textcircled{2}+5\textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3-\sqrt{129}}{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って非自明解は $\mathbf{x} = c \begin{pmatrix} \frac{-(3-\sqrt{129})}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$,

固有値 $\lambda = \frac{7+\sqrt{129}}{2}$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \frac{-(3-\sqrt{129})}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有値・固有ベクトル

固有値 $\lambda = \frac{7 - \sqrt{129}}{2}$ に対して同様に計算すると

固有値 $\lambda = \frac{7 - \sqrt{129}}{2}$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \frac{-(3 + \sqrt{129})}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

固有値・固有ベクトル

さらに厳しい例として教科書より $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とすると

$$\det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1$$

これより固有値は $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ と複素数になる。気にせず続けると

固有値 $\lambda = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ に対して

$$\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} E - A_{16} \right) = \begin{pmatrix} \frac{-3 + \sqrt{3}i}{2} & 3 \\ -1 & \frac{3 + \sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{-3 + \sqrt{3}i} \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{-3 + \sqrt{3}i} \\ -1 & \frac{3 + \sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} \quad (**)$$

固有値・固有ベクトル

$$\text{ここで } \frac{6}{-3 + \sqrt{3}i} = \frac{6(3 + \sqrt{3}i)}{(-3 + \sqrt{3}i)(3 + \sqrt{3}i)} = \frac{-(3 + \sqrt{3}i)}{2}$$

より (**) から続けると

$$\xrightarrow{\textcircled{2} + \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-(3 + \sqrt{3}i)}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{従って非自明解は } \mathbf{x} = c \begin{pmatrix} \frac{3 + \sqrt{3}i}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{固有値 } \lambda = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ に対応する固有ベクトルは } \begin{pmatrix} \frac{3 + \sqrt{3}i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有値・固有ベクトル

固有値 $\lambda = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ に対して同様に計算すると

固有値 $\lambda = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} \frac{3 - \sqrt{3}i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

となり固有ベクトルも複素数になる。

固有値・固有ベクトル

固有値が重複する場合は一番単純な例では

$A = aE$ (a は定数) とすると

$$\det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2$$

となり $\lambda = a$ が固有値 (重複) になる。

対応する固有ベクトルは

$$\lambda E - A = O$$

になり非自明解は $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ になり

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と 2 個すなわち重複度分取れる。

固有値・固有ベクトル

これに対して $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2$$

となりこの場合も固有値は重複し、 $\lambda = 1$ が固有値（重複）になる。

一方で固有ベクトルを計算すると、

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-\textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので非自明解は $\mathbf{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ になり

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1 つしかない。（重複度より少ない）

固有値・固有ベクトル

サイズが大きくなると計算は大変になるが、本質的には同じ

例えば $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ に対して固有値、固有ベクトルを計算してみると

$$\det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -6 & -4 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 2 & 6 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

従って固有値は $-1, 1$ (1 は重複)

固有値・固有ベクトル

固有値 $\lambda = -1$ に対して

$$\lambda - A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} -1/4 \textcircled{1} \\ -1/2 \textcircled{2} \end{smallmatrix}]{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{3}-2\textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcircled{3}-3\textcircled{2}]{\textcircled{1}-3/2\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って固有値 $\lambda = -1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

固有値・固有ベクトル

固有値 $\lambda = -1$ (重複) に対して

$$\lambda - A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1/2 \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{3} - 2\textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{これより非自明解は } \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

従って固有値 $\lambda = -1$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有値・固有ベクトル

定義 固有空間

A を n 次正方行列 λ を A の固有値とする。

λ に関する固有ベクトル全体

$$V(\lambda) = \{\mathbf{x}; (\lambda - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

を固有空間と呼ぶ。

定義 次元

同次連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ に対して、非自明解全体を V とする。

$$V = \{\mathbf{x}; A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

このとき V の次元 $\dim V$ を解を書くのに必要なパラメータの数で定義する。

固有値・固有ベクトル

命題 固有空間の次元

$$\dim V(\lambda) = n - \text{rank}(\lambda - A)$$

$$\dim V(\lambda) \geq 1$$

定義 1 次独立、1 次従属

ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ が 1 次独立

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ となるのは $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ の時のみ。

ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ が 1 次独立でないとき 1 次従属と呼ぶ。

定理 7.4

n 次正方行列 A の相異なる固有値に対する固有ベクトルは 1 次独立

注意

$\dim V(\lambda) \leq$ 解 λ の重複度であり、
全ての固有値 λ で $=$ 成立 $\Leftrightarrow$ 良い例 (対角化可能)
ある固有値 λ で $<$ 成立 $\Leftrightarrow$ 悪い例 (対角化不可能)
である。

固有値・固有ベクトル

問題

次の行列の固有値、固有ベクトルを求めよ

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$