

基礎数理 B 第 9 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

10 月 30 日

逆行列

(m, n) 行列に行基本変形を繰り返していく。前回 1 次方程式を解いたときに行った Step $j-1$, Step $j-2$ を j に関して順に進めていけば、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & * \end{array} \right)$$

となりそうだが、

- 型の違い、
 - Step $j-1$ がうまくできない
 - Step $j-2$ がうまくできない
- ことがありえる。

逆行列

Step $j-1$ ができないときは Step $j-2$ もとばしてやると
少なくとも階段状でかつ階段で降りているところでは 1 階段の下
では 0 になるように変形できる。

定義

行列 A を行基本変形により階段状に書き換えた時に ${}^t\mathbf{0}$ （行ベクトルとしての $\mathbf{0}$ ベクトル）にならない行ベクトルの個数を階数、ランクと呼び、 $\text{rank } A$ と書く。また $\text{rank } \mathbf{O} = 0$ とする。

注意

階数の計算だけであれば、上三角行列になるように、計算を省略しても構わない。

逆行列

階数計算の例

$$\text{rank } A_7 = \text{rank} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \stackrel{\textcircled{1}/5}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\textcircled{2}-4\textcircled{1}}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{rank } A_{14} = \text{rank} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \stackrel{\textcircled{1}/3}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 5/3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\textcircled{2}-\textcircled{1}}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 5/3 \\ 0 & 4/3 \end{pmatrix} \stackrel{3/4\textcircled{2}}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 5/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{rank } A_{15} = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \stackrel{\textcircled{1}/7}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\textcircled{2}-9\textcircled{1}}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

逆行列

$$\text{rank } A_{71} = \text{rank} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \stackrel{\textcircled{1}/4}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\textcircled{2}-5\textcircled{1}}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & -10 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\textcircled{3}-8\textcircled{1}}{=}$$

$$\stackrel{-\textcircled{2}/5}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & -1/5 \\ 0 & -10 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\textcircled{3}+10\textcircled{2}}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\textcircled{3}/3}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

逆行列

問題

次の行列の階数を求めよ。

A_{16} , A_{18} , A_{46} , A_{75}

逆行列

命題

(m, n) 行列 A に対して
 $\text{rank } A \leq m$ かつ $\text{rank } A \leq n$

命題

行列 A, B に対して
 $\text{rank } (AB) \leq \text{rank } A$ かつ $\text{rank } (AB) \leq \text{rank } B$

定理 3.2

n 次正方行列 A に対して
 A が正則 $\Leftrightarrow \text{rank } A = n$

逆行列

天下りの的に次の3つの正方行列を導入する

(1) 単位行列 E のうち $(i, i), (j, j)$ の2つの成分を0にし、かわりに $(i, j), (ji)$ の2つの成分を1にしたもの。

(2) 単位行列 E のうち (i, i) 成分を c にしたもの

(3) 単位行列 E のうち (i, j) 成分を c にしたもの

これらを行列 A に左からかけてみると結果として

(1) 第 i 行と第 j 行を取りかえる

(2) 第 i 行を c 倍する

(3) 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える

のように行基本変形の操作に対応している。

(列基本変形はこれらの行列を右からかけることに対応している。)

これらの (1), (2), (3) の操作それぞれに対して元に戻す操作を考えると、やはり基本変形の操作が対応している。

逆行列

これらの事実から

定理 3.1

(m, n) 行列 A に行基本変形を繰り返して行列 B になったとすると、ある m 次正則行列 P があって次のように書ける

$$PA = B$$

この定理 3.1 と Step j-1 Step j-2 として挙げた操作を見れば A の逆行列を求めるのに、 A から初めて Step j-1 Step j-2 として E までたどり着けばよいように思えるが、一方で、これだと肝心の A^{-1} が分からない。

これに対して行列の行列 (AE) から初めて (EP) になったとすると、この P は A の逆行列になっている。

また (AE) から初めて途中の j で Step j-1 ができない状況になった時には A の階数が行列のサイズより小さくなっている。

これらをまとめることで

逆行列

命題

$(AE) \rightarrow \text{Step 1-1, Step1-2, } \dots \rightarrow (EP)$

となれば $A^{-1} = P$

$(AE) \rightarrow \text{Step 1-1, Step1-2, } \dots \text{ Step } j-1$ ができない

A は正則でない

注意

多くの場合逆行列は

$(AE) \rightarrow \text{Step 1-1, Step1-2, } \dots \rightarrow (EP)$

の形で求める。

逆行列

実際に逆行列を計算してみる。

$$(A_{46}E) = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{1}/8} \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1 & 1/8 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\textcircled{2}-7\textcircled{1}} \\ \xrightarrow{\textcircled{3}-7\textcircled{1}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 25/4 & 2 & -7/8 & 1 & 0 \\ 0 & 9/4 & -3 & -7/8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4/25\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8/25 & -7/50 & 4/25 & 0 \\ 0 & 9/4 & -3 & -7/8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

逆行列

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} - 1/4 \textcircled{2} \\ \textcircled{3} - 9/4 \textcircled{2} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 23/25 & 4/25 & -1/25 & 0 \\ 0 & 1 & 8/25 & -7/50 & 4/25 & 0 \\ 0 & 0 & -93/25 & -14/25 & -9/25 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-25/93 \textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 23/25 & 4/25 & -1/25 & 0 \\ 0 & 1 & 8/25 & -7/50 & 4/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 14/93 & 9/93 & -25/93 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} - 23/25 \textcircled{3} \\ \textcircled{2} - 8/25 \textcircled{3} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/93 & -12/93 & 23/93 \\ 0 & 1 & 0 & -35/186 & 12/93 & -8/93 \\ 0 & 0 & 1 & 14/93 & 9/93 & -25/93 \end{pmatrix}$$

$$\text{従って } A_{46}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/93 & -12/93 & 23/93 \\ -35/186 & 12/93 & -8/93 \\ 14/93 & 9/93 & -25/93 \end{pmatrix}$$

$$\text{もしくは } A_{46}^{-1} = \frac{1}{186} \begin{pmatrix} 4 & -24 & 46 \\ -35 & 24 & -16 \\ 28 & 18 & -50 \end{pmatrix}$$

注意

検算に関して

たとえどのような基本変形をしたかを書き込んでいても、この計算が正しいかを一つ一つ確認するのはかなり大変である。

一方で逆行列を計算している場合、出てきた結果の A^{-1} と A をかけてみれば、結果が、正しいか間違っているかだけは簡単に判断できる。

逆行列

問題

次の行列の逆行列を求めよ

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_{48}, \quad A_{80}$$