

基礎数理 B 第 5 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

10 月 16 日

行列式

日本語では「行列式」英語では「determinant」意識すれば「決定するもの」

行列式は1次方程式の解の一意性を「決定するもの」として導入されたが、現在では他の意味でも使われて、「行列の計算」としては重要なものの一つである。

この講義では「行列式」がうまく出来上がった後に、こうすれば見通し良く定義できるという方向で、話を進める。

定義 置換

有限集合 X から X 自身への 1 対 1 の写像

$\sigma : X \rightarrow X$ を X 上の置換と呼ぶ。

$X = \{1, 2, \dots, n\}$ のとき n 文字の置換と呼びその全体を S_n と書く。

行列式

書き方

$\sigma \in S_n$ とすると

$$\sigma(1) = i_1, \sigma(2) = i_2, \dots, \sigma(n) = i_n$$

と書けるが、このとき

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

と書く。上下の対を変えなければ書く順序は変えてもよい。

例えば

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

行列式

命題

$$\#S_n = n!$$

定義 置換の積

$\sigma\tau$ は合成写像 $\sigma \circ \tau = \sigma(\tau)$ で定義する。
すなわち $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$

定義 恒等置換と逆置換

$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を恒等置換

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ に対して $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を
逆置換と呼ぶ

定理 2.1

$\rho, \sigma, \tau \in S_n$ とする。

(1) $(\rho\sigma)\tau = \rho(\sigma\tau)$

(2) $\varepsilon\sigma = \sigma\varepsilon = \sigma$

(3) $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \varepsilon$

(4) $(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}$

行列式

定義 互換

S_n のうち $\sigma(i) \neq i$ となる $1 \leq i \leq n$ が 2 つのとき互換と呼ぶ。
特に $\sigma(i) = j, \sigma(j) = i$ のとき i と j の互換と呼び $\sigma = (i\ j)$ と書く。

定理 2.2

任意の置換は互換の積で書ける。
ただし表し方は 1 通りではない。

定理 2.3

1 つの置換を互換の積で表したときに必要な互換の個数は 1 通りではないが、その個数が奇数であるか偶数であるかは、表し方によらない。

行列式

定義 偶置換、奇置換、置換の符号

偶数個の互換の積で表される置換を偶置換、
奇数個の互換の積で表される置換を奇置換と呼ぶ。
置換の符号を

$$\operatorname{sgn} \sigma = \begin{cases} 1 & \sigma \text{ が偶置換の時} \\ -1 & \sigma \text{ が奇置換の時} \end{cases} \text{ で定める。}$$

定理 2.4

$\sigma, \tau \in S_n$ とすると

- (1) $\operatorname{sgn} \varepsilon = 1$
- (2) $\operatorname{sgn} \sigma\tau = \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \tau$
- (3) $\operatorname{sgn} \sigma^{-1} = \operatorname{sgn} \sigma$

行列式

定義 行列式

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、 A の行列式 $\det A$ を

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \, \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}\end{aligned}$$

で定義する。

行列式は $\det A, |A|$, などと書く。

行列式

命題で挙げたように $\#S_n = n!$ ある。行列式の定義から n 次正方行列の行列式は $n!$ の和で書けるが、 $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$ 程度なら、直接書けるが、 $4! = 24$ あたりから、すべての項を書き上げるだけでも大変。

多くの場合、3 次正方行列までの行列式は 1 回計算して、計算方法を覚えてしまう。

それに対して、4 次以上の行列式は、性質をうまく使って、3 次以下の行列式の計算に持ち込む。

後半部分に関しては次回、次々回に話すことにして、今回はとにかく 3 次までの行列式の計算を定義通りにやる。

行列式

命題 行列式 $n = 1$

$$\det A = \det(a_{11}) = a_{11}$$

行列式

$n = 2$ の場合

置換 $\sigma \in S_2$ は $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の 2 つ。

それぞれの符号は $\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1, \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1$

従って定義通り行列式を計算すると

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn} \sigma \, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

命題 行列式 $n = 2$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

行列式

注意

数年前までは高校で次のように教えられていたため、この形で暗記している人は多い。

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

注意

2 次正方行列の逆行列で $ad - bc$ が出てきたが、これは実際に行列式が出てきている。

行列式

$n = 3$ の場合

置換 $\sigma \in S_3$ は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

の 6 つ。

それぞれの符号は上 3 つが $+1$, 下 3 つが -1

行列式

定義通り行列式を計算すると

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn} \sigma \, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$$
$$= \{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\}$$
$$- \{a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33}\}$$

命題 行列式 $n = 3$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$= \{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\}$$
$$- \{a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33}\}$$

注意

サラスの公式、たすき掛けの方法などと呼ばれ、視覚的に覚えてしまうことが多い。

行列式

例えば

$$\det A_{14} = \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 3 \times 3 - 5 \times 1 = 4$$

$$\det A_{15} = \det \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = 0 \times 9 - 7 \times 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \det A_{46} &= \det \begin{pmatrix} 8 & 2 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix} \\ &= (8 \times 8 \times 4 + 2 \times 9 \times 7 + 8 \times 7 \times 4) - (8 \times 9 \times 4 + 8 \times 8 \times 7 + 2 \times 7 \times 4) \\ &= -186 \end{aligned}$$

行列式

問題

以下を求めよ。

$\det A_{16}, \det A_{17}, \det A_{18}, \det A_{19}, \det A_{20}, \det A_{21}$
 $\det A_{47}, \det A_{48}, \det A_{49}, \det A_{50}$

注意

線形代数の講義内だけでなく、数学でない工学分野の各種問題の中に、陰に陽に行列式の計算が出てくる。

特に 2 次、3 次程度は当たり前に計算できるようにしておくように。

教科書の問題などを活用するように。