

基礎数理 B 第 2 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

10 月 6 日

行列のスカラー倍と和

いくつかの特別な行列

前回のベクトルは特別な行列の1つ

定義 正方行列

(n, n) 行列を n 次正方行列、 n 次行列と呼ぶ。

例えば

$A_{14} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ は2次正方行列、

$A_{46} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ は3次正方行列、

$A_{80} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ は4次正方行列。

行列のスカラー倍と和

定義 対角成分

$A = (a_{ij})$ を n 次正方行列とする。

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ を対角成分と呼ぶ。

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \boxed{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

行列のスカラー倍と和

例えば

$$A_{14} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ の対角成分は、} 3, 3$$

$$A_{46} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ の対角成分は、} 8, 8, 4$$

$$A_{80} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} \text{ の対角成分は、} 4, 1, 5, 7。$$

問題

A_{15}, A_{47}, A_{81} の対角成分を求めよ。

行列のスカラー倍と和

定義 O 行列

全ての成分が 0 の行列を O で書く。

特に型を強調するときは O_{mn} と書く。

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

行列のスカラー倍と和

定義 単位行列 E

正方行列で、対角成分が全て 1、他の成分がすべて 0 の行列を単位行列と呼び E と書く。

特に型を強調するときは E_n と書く。

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

注意

単位行列は E 、 I 、 U などを書くこともある。

それぞれ ドイツ語 Einheitsmatrix、英語 Identity matrix、英語 Unit matrix の頭文字からきている。

行列のスカラー倍と和

定義 対角行列

正方行列で、対角成分以外の成分がすべて 0 の行列を対角行列と呼ぶ。

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

行列のスカラー倍と和

注意

一般の型の行列は書ききれないので省略して書く。
その書き方は、その場で分かるように書くので、同じ書き方でも、違う場合もある。(同じ文章内ではなるべく同じ書き方にする。)
基本的には文脈から分かるのが普通で、必要であれば、注意書きをする。

行列のスカラー倍と和

注意

単位行列は下記 E_1 と省略して書くこともあるが、0 を強調して E_2 のように書くこともある。(フォントの関係で O が小さいがもう少し大きく書くことが多い)

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & 1 \end{pmatrix}$$

行列のスカラー倍と和

注意

対角成分が全て 1 でそれ以外の成分は何でもよいときに下記 A_1 と省略して書くこともあるが、「何でもよい」を強調して A_2 のように書くこともある。(フォントの関係で * が小さいがもう少し大きく書くことが多い)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & 1 \end{pmatrix}$$

行列のスカラー倍と和

定義 上三角行列、下三角行列

正方行列で、対角成分より下の成分 ($i > j$ となる (i, j) 成分) がすべて 0 の行列を上三角行列 (下記 A_1)、対角成分より上の成分 ($i < j$ となる (i, j) 成分) がすべて 0 の行列を下三角行列 (下記 A_2) と呼ぶ。

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

行列のスカラー倍と和

定義 行列の行列

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

のように $A_{11} \sim A_{22}$ を行列として、行列の行列を書いたとき、 $A_{11} \sim A_{22}$ のすべてを成分で書き直したときに行列になれば、その形で A を定義する。

上手く書けなかったら定義しない。

注意

行列の行列を考えるときは、そのように考えると、上手くいく事柄が後に控えている。

例えば、上手く行列の行列を作れば掛け算などが、簡単に書けることがある。

行列のスカラー倍と和

定義 実行列と複素行列

行列のすべての成分が実数のとき実行列
複素数のとき複素行列と呼ぶ。

定義 スカラー

実数や複素数（が単体で出てきたとき）これらを行列、ベクトルと区別するためにスカラーと呼ぶ。

定義 共役行列

$A = (a_{ij})$ を複素行列とする。各成分を複素共役で書き換えた行列を共役行列といい $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ と書く

行列のスカラー倍と和

定義 行列のスカラー倍

(m, n) 型行列 $A = (a_{ij})$ とスカラー c に対して A のスカラー倍 cA を各成分 c 倍したもので定義する。

$$cA = c \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & \cdots & ca_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ca_{m1} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix} = (ca_{ij})$$

また $-A = (-1)A$ とする。

例えば

$$3A_1 = 3(3 \ 6) = (9 \ 18)$$

(ベクトルの場合は高校の時と同じになる。)

$$-2A_{36} = -2 \begin{pmatrix} 7 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 0 & -16 \\ 0 & -10 & -6 \end{pmatrix}$$

行列のスカラー倍と和

問題

以下を求めよ。

$$2A_{21}, \quad -3A_{47}, \quad -2A_{67}, \quad 3A_{72}$$

行列のスカラー倍と和

定義 行列の和

(m, n) 型行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ に対して行列の和 $A + B$ を各成分の和で定義する

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} = (c_{ij}) \end{aligned}$$

また A, B の型が違った場合 $A + B$ を定義しない。

行列のスカラー倍と和

例えば

$$A_{14} + A_{15} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A_{41} + A_{42} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 3 & 8 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$A_{14} + A_{41}$ は型が違うので定義できない。

行列のスカラー倍と和

問題

以下を求めよ。

$$A_{19} + A_{20}, \quad A_{37} + A_{38}, \quad A_{46} + A_{47}, \quad A_{66} + A_{69}$$

スカラー倍とあわせて

$$3A_{21} + 6A_{22} = 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 33 \\ 15 & 21 \end{pmatrix}$$

なども定義できる。

行列のスカラー倍と和

定理 1.7

A, B, C を (m, n) 型行列、 c, d をスカラーとする。
このとき以下が成り立つ。

- 1 (1) $A + B = B + A$
(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$
(3) $A + O = O + A = A$
(4) $A - A = O$
- 2 (1) $c(A + B) = cA + cB$
(2) $(c + d)A = cA + dA$
(3) $(cd)A = c(dA)$
(4) $1A = A$

行列のスカラー倍と和

問題

$A_0 = (1)$ ((1, 1) 行列) とする。

$$3A_{80} - 2 \begin{pmatrix} A_{50} & A_{35} \\ A_{27} & A_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{15} & A_{21} \\ A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

を求めよ。