

応用数理 E 第 4 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

4 月 30 日

確率変数とその分布

事象を日本語としてとらえるのは分かりやすい部分もあるが、特に理工系の分野では、確率的に捉えられるべきものが、何かの数値を持っていることが多い。また逆にある数値を取る確率としてとらえた方が分かりやすいことが多いが、一方で、数値は連続的な値をとり、有限個に分割をすることは不可能な場合もある。基本的には統一的に捉えた方がよいしその方法はあるが、そのためには数学的な準備が多すぎて、この授業だけでは到底追いつかない。次善の策として、取りえる値が離散的なものと、連続的なものとに分けて捉えることにする。

確率変数とその分布

定義

確率変数 : X, Y : 取りえる値と確率に対応しているもの。

確率分布 : P : 取りえる値と確率の組

離散型確率変数 : 確率変数のうち特に取りえる値が離散的なもの

連続型確率変数 : 確率変数のうち特に取りえる値が連続的なもの

代表的な分布を離散型、連続型に分けて紹介する。

確率変数とその分布

離散型確率変数

○ 離散型一様分布

$$P(X = k) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

さいころや n 枚のカードから 1 枚取り出すなど、等確率になることが自然なときに使う。

○ 二項分布 $B(n, p)$

$$P(X = k) = {}_n C_k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

但し $0 \leq p \leq 1$ とする。

ある試行において A が起こる確率を p としたときに（直感的な意味で）この試行を n 回独立に行う。この時 A が k 回起こる確率に相当。

確率変数とその分布

○ ポアソン分布 $Po(\lambda)$ (Poisson (人名))

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

但し $\lambda > 0$ とする。

まれにしか起きない事柄が実際に起こってしまう確率。

二項分布 $B(n, p)$ において $np = \lambda$ として、 $n \rightarrow \infty$ の極限を考えるとポアソン分布に収束する。

確率変数とその分布

連続型確率変数

多くの場合、全ての a に対して $P(X = a) = 0$ でないと確率の性質を満たさない。一方で $P(a \leq X \leq b) > 0$ となり意味を持つ。

特に

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

の形で表されるものが重要な分布であり、それ以外のものはモデルとして取り扱うのが困難である。通常このように積分で書き表されるようなモデル（分布）を考える。

上のように積分を使って書いた場合の $f(x)$ を決めれば分布が決まるが、この関数 $f(x)$ を（確率）密度関数と呼ぶ。

確率変数とその分布

密度関数の性質

確率の基本性質を満たすためには

(i) $f(x) \geq 0$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

を満たす必要があるが、逆に (i),(ii) を満たせば必ず密度関数になる。

確率変数とその分布

- 連続型一様分布 $U(a, b)$ (uniform distribution)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

等確率のモデルを連続的に拡張したもの。

- 指数分布 (exponential distribution)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{1}{\alpha}x\right) & x \geq 0 \end{cases}$$

但し $\alpha > 0$ とする。

製品などが自然に壊れるときの壊れるまでの時間が指数分布になりやすい。またランダムに起こる事柄に関して、ある事柄が次に起こるまでの時間も指数分布になりやすい。

確率変数とその分布

○ 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ (normal distribution)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

但し $\sigma > 0$ とする。

統計学的に一番重要な分布で、多くの独立なランダムな現象の重ね合わせ（算術平均）で与えられるような確率現象はほとんど正規分布で近似可能になる。（中心極限定理）

特に $\mu = 0, \sigma = 1$ として

$N(0, 1)$ を標準正規分布 (standard normal distribution) と呼ぶ。

確率変数とその分布

分布関数 F

連続型の分布と、離散型の分布を統一的に取り扱うためには

$$F(x) = P(X \leq x)$$

を使うと良いことがよく知られている。

特にそれぞれ

離散型 :
$$F(x) = \sum_{k: k \leq x} P(X = k)$$

連続型 :
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

となる。

確率変数とその分布

分布関数の性質

$F(x)$ は単調増大関数

$F(x)$ は右連続関数

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

連続型ならば $F'(x) = f(x)$

確率変数とその分布

上側 α 点：統計的に重要な量

定義

確率変数 Z と与えられた $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して

$$P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$$

となる z_α を確率変数 Z の上側 α 点と呼ぶ。

確率変数とその分布

正規分布の確率に関して

よく知られていることとして、正規分布の密度関数（に含まれる） $\exp(ax^2)$ の積分は計算不可能である（我々のよく知っている関数の四則演算と逆関数、それらの合成だけを使って書き表すことができない）。一方で理工系の分野では、目に見えないような小さなランダムが多く重なって、一つのランダムな（物理）量を計測していると考えることが自然なものが多く、正規分布に従っていると思うことが自然なものが多い。そのため、これらの量がある区間に入っている確率を計算したいが、積分計算として厳密な計算は不可能であるが、近似値は欲しい。このような観点から、積分の近似計算は行われていて、多くの教科書では、その近似値の表が載っている。この教科書では付表 1 として掲載されている。

確率変数とその分布

問題

N 先生は、もし標準正規分布に従う確率変数 Z と全ての $a \leq b$ に対して $P(a \leq Z \leq b)$ の値が分かれば、積分の変数変換を用いることで、正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 X に対して

$$P(a \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq b) = P(a \leq Z \leq b)$$

となり全ての正規分布の確率が分かると主張している。
この主張が正しいければ、その理由を（どのように変数変換すればよいか）、間違っている場合には修正して、その理由を述べよ。

確率変数とその分布

問題

N 先生は、標準正規分布に従う Z と $a > 0$ に対して、 $P(Z \geq a)$ が分かれば $P(Z < a)$ も分かるし、 $P(Z \leq -a)$, $P(Z > -a)$ も分かると主張している。

この主張は正しいが、簡単に理由を説明して、 $P(Z < a)$, $P(Z \leq -a)$, $P(Z > -a)$ がどのように与えられるかを述べ、さらに $P(-2.04 \leq Z \leq 0.33)$ (の近似値) を教科書の付表を使って求めよ。