

応用数理 E 第 3 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

4 月 27 日

順列と組合せ

確率モデルを作るときにはもっともらしいモデルを作った方良い。もっともらしいモデルの多くは考えられるパターンが等確率で出てくるものが多い。全てのパターン、もしくはその総数や、そのうちの特定のパターン、その個数を考えるときには順列、組合せを用いると、うまくいくことが多い。

順列と組合せ

定義

階乗 : $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$

順列 : ${}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots\{n-(k-1)\}$

組合せ : ${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

注意 : ${}_nP_k, {}_nC_k$ などの記号を使うのは日本だけ。順列の方は世界的な記号はなく、組合せは $\binom{n}{k}$ と書くことが多い。
この授業では日本的に ${}_nP_k, {}_nC_k$ を用いる。

問題

以下に（入試などでもでそうな）問題とその解答（結果）のみを書く。どのように考えればその解答で正しいと言えるか解説を与えよ。

(1) A 君を含んだ n 人が 1 列に並ぶとき、A 君が 3 番目になる並び方は何通りあるか？

解答： $(n-1)!$ 通り

(2) ABC を含んだ n 人が 1 列に並ぶとき、A 君の前後が BC になる並び方は何通りあるか？

解答： $(n-2)! \cdot 2$ 通り

(3) $1, 2, \dots, n$ から r 個取り出して 1 列に並べる。 $1, 2$ が隣り合わない並び方は何通りあるか？

解答： $\frac{n!}{(n-r)!} - 2(r-1) \frac{(n-2)!}{\{n-(r-2)\}!}$

定理 1.5

2 項定理

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k x^k y^{n-k}$$

なおこのことは

$${}_{n+1}C_k = {}_nC_k + {}_nC_{k-1}$$

が成り立つことから導き出される。

(組合せであることを考えると、2 項定理が成り立つことは直感的にすぐわかるという人もいる。)

順列と組合せ

確率モデルへの応用

最初にも述べたように、全ての考えられるパターンが等確率で出てくるモデルはもっともらしいモデルである。受験などでは何も書いていなくても、全てのパターンが等確率で出てくることが仮定されている。

順列と組合せ

問題例

1 から 10 までの番号が書かれた球を 3 個取り出し、1,2,3 の箱に順に入れる。このとき箱の番号と球の番号が 2 組だけ一致する確率を求めよ。

解答例

等確率のモデルを採用すると、

全ての球の入れ方（並べ方）は ${}_{10}P_3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ 通り

箱の番号と球の番号が 2 組だけ一致するパターンはそろった番号の組み合わせと考えれば ${}_3C_2 = 3$ 通り

そろっていない箱には 4 から 10 のどれかが入っているので、各々 7 通り。

2 組だけ一致する組合せの総数は $3 \cdot 7 = 21$ 通り。

従って確率は $\frac{21}{720} = \frac{7}{240}$ 。

順列と組合せ

問題

この問題例の設定で、N 先生は、箱の番号と球の数が、3 組とも一致する確率、1 組だけ一致する確率、1 組も一致しない確率が順に $\frac{1}{720}$, $\frac{171}{720}$, $\frac{527}{720}$ であると主張している。

正しい場合はその説明を与え、間違っている場合は修正を行いその説明を与えよ。

順列と組合せ

次の2つの定理はどちらもベイズの定理と呼ばれている。実際に単純にベイズの定理といわれた場合どちらを指しているのかは文脈から想定するか、実際に聞いてみるまで分からない。

定理 1.6

$A_1, A_2, \dots, A_n$ を互いに排反で $\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$, $P(A_i) > 0$ とする。
このとき

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P_{A_i}(B)$$

定理 1.7

$A_1, A_2, \dots, A_n$ を互いに排反で $\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$, $P(A_i) > 0$ とする。
 $P(B) > 0$ となる B に対して

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P_{A_j}(B)}$$

順列と組合せ

前回出した病気の診断の例では条件付確率 $P_{S_i}(D_1), P_{S_i}(D_2)$ がすぐに出てきたが、それは病気の種類を 2 種類に限定したからである。複数の病気の種類を想定する場合は今回の定理 1.7 を使うことになる。

次の例題は定理 1.7 に対応するベイズの定理の例題として有名な問題であり、日本語のものだけでなく、英語のものを含めて、多くの教科書で取り上げられている。

順列と組合せ

例題

A, B, C の機械で同じ製品を作るが、 $A : 20\%, B : 35\%, C : 45\%$ の割合で作っている。不良品のである確率は各々

$A : 6\%, B : 4\%, C : 2\%$ である。不良品を取り出したときにこれが A で作られた確率を求めよ。

解答例

事象を $A_1 : A$ で制作された、 $A_2 : B$ で制作された、 $A_3 : C$ で制作された、 $B : 不良品だった$ 、としてベイズの定理を適用すると

$$\begin{aligned} P_B(A_1) &= \frac{P(A_1)P_{A_1}(B)}{\sum_{i=1}^3 P(A_i)P_{A_i}(B)} \\ &= \frac{0.2 \cdot 0.06}{0.2 \cdot 0.06 + 0.35 \cdot 0.04 + 0.45 \cdot 0.02} = \frac{12}{35} \end{aligned}$$

順列と組合せ

問題

N 先生は上の問題に関して不良品を取り出したときにこれが B , C で作られた確率はそれぞれ $\frac{14}{35}$, $\frac{9}{35}$ と主張している。正しい場合はその説明を与え、間違っている場合は修正を行いその説明を与えよ。

順列と組合せ

次のページの問題はベイズの定理を用いることを念頭に置いて作った問題であるが、ほぼ全ての場合を考えているので、直接的に計算をした方が早いかもしれない。なお特に解き方は指定しない。

問題

1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 6 と 8 枚のカードがあり、2 枚ずつの 2, 6 のカードは何らかの理由で区別可能とする。この 8 枚のカードから 2 枚取り出し順に並べる。

(1) 並べ方の総数はいくつか。

以下並べ方に対して等確率がでるモデルで考える。

(2) 1 枚目が 1 である確率を求めよ。以下 1 枚目が 2, 3, 4, 5, 6 である確率を求めよ。

(3) 1 枚目が 1 である条件の下で、 $(2 \text{ 枚目のカードの数}) / (1 \text{ 枚目のカードの数})$ が整数になる条件付確率を求めよ。以下 1 枚目が 2, 3, 4, 5, 6 である条件の下で、 $(2 \text{ 枚目のカードの数}) / (1 \text{ 枚目のカードの数})$ が整数になる条件付確率を求めよ。

(4) $(2 \text{ 枚目のカードの数}) / (1 \text{ 枚目のカードの数})$ が整数である条件の下で、1 枚目が 3 である条件付確率を求めよ。