

基礎数理 AII 第 12 回目以降のレポートに関して

永幡幸生
新潟大学工学部

2 月 2 日

第12回曲面積

基本的に公式に代入する。

$f(x, y) = x^2 - y^2$ より $f_x = 2x$, $f_y = -2y$ 従って求める曲面積は

$$S = \iint_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy$$

で表されるが $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq a^2\}$ なので極座標変換
 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を行う。

対応する領域は $E = \{(r, \theta); 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ となり、ヤコビアン $J = r$ なので

$$\begin{aligned} S &= \iint_E \{4r^2 + 1\}^{1/2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \{4r^2 + 1\}^{1/2} dr \\ &= 2\pi \frac{2}{3} \frac{1}{8} \left[\{4r^2 + 1\}^{3/2} \right]_{r=0}^a = \frac{\pi}{6} \{(4a^2 + 1)^{3/2} - 1\} \end{aligned}$$

第13回級数の収束発散

級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k}$ に対して（絶対値を付けて）ダランベールの判定法

を適用してみると $a_k = \frac{a^k}{k}$ なので

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a^{k+1}}{k+1} \rightarrow a, \quad (k \rightarrow \infty) \text{ より}$$

$|a| < 1$ であれば絶対収束するので収束

$|a| > 1$ であれば絶対収束しないことが分かり、発散する。

$a = 1$ であれば $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ は発散する。

（必要ならば $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ と比較して発散することをみる。）

$a = -1$ の時は授業の時に話だけしたが、収束する。

（交代級数に関して調べてみる。）

第 13 回級数の収束発散

実際はダランベールの判定法は正項級数に関する判定法なので、 $a < -1$ の時に発散することは分らない。

一方で $|a| > 1$ の場合 $|a_k| = \frac{|a|^k}{k} \rightarrow \infty$ になるのでスライドにある系より発散することが分かる。

第14回収束半径

それぞれ、ダランベールの判定法、コーシーの判定法を適用してみる。

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2k+1} \text{ に対して } a_k = \frac{1}{2k+1} \text{ より}$$

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{2k}{2k+1} \rightarrow 1, (k \rightarrow \infty) \text{ より逆数を取って } R = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k x^k \text{ に対して}$$

$$\sqrt[k]{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} = 1 + \frac{1}{k} \rightarrow 1, (k \rightarrow \infty) \text{ より逆数を取って } R = 1$$

共に $R = 1$ になっていて逆数を取り忘れても正しい値になるが、それ以外になることもあるので注意するように。