

基礎数理 AII 第 14 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

2 月 2 日

前回級数の話をしたが、実際に考えたいのは

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

の形をした級数で与えられる関数である。

テーラー展開を考えれば形式的にはこのような形で書き換えられるが、これはどのような時に意味を持つのか。また微分、積分を考えれば、特に積分に関しては原始関数が存在しないものがあるが、級数の形では形式的に積分を行うことで、再度係数の異なる級数で与えられる関数になる。実際にこれは意味を持つのだろうか。

定義

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - a)^k$$

の形の x の関数を $\{a_k\}$ を係数とする $x = a$ 中心の整級数または
冪級数（べき級数）と呼ぶ。

簡単にするために $a = 0$ だけ考える。

補題 アーベルの補題

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

が $x = x_0 (\neq 0)$ で収束すれば $|x| < |x_0|$ となる x で絶対収束する。

この事実から整級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ の収束発散は次の 3 パターンに分類できる。

補題

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ の収束発散は

(1) $x = 0$ で a_0 それ以外では発散。例 $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$

(2) 全ての x で収束。例 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$

(3) ある R が存在して $0 \leq |x| < R$ で収束、 $|x| > R$ で発散

例 $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ の場合 $R = 1$ になる。

注意

この補題で (3) の場合 $|x| = R$ の場合は収束する場合もあれば、発散する場合もある。

例 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} x^k$ の場合 α の値によらず $R = 1$ になるが、

$\alpha < 0$ ならば $x = \pm 1$ 共に発散。

$0 < \alpha \leq 1$ ならば $x = -1$ は収束するが $x = 1$ は発散。

$\alpha > 1$ ならば $x = \pm 1$ 共に収束する。

定義

この補題において R を (1) の場合 0 , (2) の場合 ∞ として、収束半径と呼ぶ。

注意

x を複素数としても補題は成立して、同様に収束半径を定義する。実数だと半径という実感はわからないが、複素数と思えば自然に半径になっている。

前回級数における 2 つの判定法を出したが、それに対応して収束半径を求める十分条件がある。

定理 13

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \quad \text{または} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

が存在すれば

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ の収束半径の逆数と一致する。なおここでは

$1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$ として適用できる。

このように与えられる関数は収束半径の内側では良い関数である。

定理 14

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ の収束半径を R とする。このとき

(1) 関数 $f(x)$ は $(-R, R)$ で連続である。

(2) 項別微分 $|x| < R$ で

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x^k)' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

(3) 項別積分 $-R < b < c < R$ で

$$\int_b^c f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_b^c x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (c^{k+1} - b^{k+1})$$

整級数

例 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^{k+1}}{k} x^k$ とする。

これは何かの関数のテーラー展開であると思われるが、どんな関数であったか次のように調べてみる。

収束半径の判定法より

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{(-2)^{(k+1)+1}}{k+1} \frac{k}{(-2)^{k+1}} \right| = \frac{2k}{k+1} \rightarrow 2$$

より収束半径は $R = \frac{1}{2}$ である。 $|x| < R$ では項別微分が可能なので

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-2)^{k+1} x^{k-1} = 4 \sum_{k=0}^{\infty} (-2x)^k$$

と等比級数で表されるため、

$$f'(x) = \frac{4}{1+2x}$$

であることが分かる。

両辺積分して $f(0) = 0$ としていたことに注意すると
 $f(x) = 2 \log(1 + 2x)$
(のテーラー展開) であったことが分かる。

問題

次の整級数の収束半径を求めよ

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2k+1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k x^k$$