基礎数理 AII 第 13 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

1 月 29 日

級数

定義

数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して形式的な無限和

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

を無限級数または級数と呼び

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

を第 n 部分和と呼ぶ。

定義

数列 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ が収束するとき級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は収束すると呼び

発散するとき、級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は発散すると呼ぶ。

級数

数列 $\{S_n\}$ の収束、発散の性質がそのまま適用できて

定理 1

(1) 級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ が収束すれば、数列 $\{a_n\}$ は 0 へ収束する。

(2) 級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_n$ が収束すれば、$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)$, $c\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ も収束して

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

(3) 級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ に有限個の項を加えたり取り除いても収束、発散は変わらない。

級数

系

数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が 0 に収束しなければ級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は収束しない。

注意

逆は成り立たない。すなわち

数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が 0 に収束しても級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は収束しない例がある。（例えば $a_k = \dfrac{1}{k}$ の場合。）

級数

定理 2

級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が収束する

$$\Leftrightarrow \sum_{k=n+1}^{m} a_k \to 0, \ \ (m, n \to \infty, m > n)$$

級数

級数の収束発散に関してよい十分条件が欲しい。

定義

級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ が収束するとき級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が絶対収束すると呼ぶ。

定理 9

級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が絶対収束すれば収束する。

定義

級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が収束するが、絶対収束しないとき、条件収束すると呼ぶ。

級数

級数の収束に関して定理 9 があるので、絶対収束するための条件を考えるのは自然である。毎回絶対値を考えるのは意味がないので全ての a_k は正（非負）である場合を考えれば十分である。

定義

$a_k \geq 0, (\forall k)$ のとき級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ を正項級数と呼ぶ。

定理 3

正項級数は部分和の列 $\{S_n\}$ が上に有界ならば収束する。

級数

定理 5

正項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ において $a_k \leq b_k$, $(\forall k)$ とする。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ が収束すれば $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ も収束する。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が発散すれば $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ も発散する。

定理 4

関数 $f(x) \geq 0$ で単調減少とする。$a_k = f(k)$ を満たすとき正項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ と広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ の収束発散は一致する。

級数

正項級数にはあまり自明でない 2 つの判定方法がある。

定理 7　コーシーの判定法

正項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ で

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = r, \quad (0 \leq r \leq \infty) \text{ であれば}$$

$$0 \leq r < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ は収束}$$

$$r > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ は発散}$$

定理 6　ダランベールの判定法

正項級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ で

$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = r, \quad (0 \le r \le \infty)$ であれば

$0 \le r < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束

$r > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は発散

級数

注意

定理 6 定理 7 の条件を比べると 定理 6 の条件が成り立てば定理 7 の条件も成り立つため、単純な意味では定理 7 だけで十分。一方で $\sqrt[k]{a_k}$ を計算するのは $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ を計算するのに比べて圧倒的に困難である。このため多くの場合まず定理 6 が使えるか確かめてみることが多い。

注意

定理 6 定理 7 の条件も（少しいい加減であるが）成立すれば $a_k \cong r^k$ を意味する。つまり等比級数との比較を行っていることになる。
$r = 1$ の場合は $a_k \cong k^{-\alpha}$, の場合を含んでいて収束する場合 $\alpha > 1$ と発散する場合 $\alpha \leq 1$ の両方がありえる。

級数

例

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ の収束、発散はダランベールの判定法を使って

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1} \to 0, \quad (n \to \infty)$$

より a を $|a|$ とすることで a の符号によらず絶対収束する。

従って級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}$ は a によらず収束する。

級数

問題

級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k}$ の収束、発散を a で場合分けせよ。