

基礎数理 AII 第 12 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

1 月 26 日

多重積分、重積分の応用

初回に話したように、2変数関数の積分が分かれば、3変数以上の関数の積分も分かる。また、なるべく予想しやすいように話をしてきたが、実際にいくつか例を挙げてみる。

積分の定義自体は1変数から2変数への拡張と同じように考えられる。実際の計算は累次積分、変数変換が挙げられるが、こちらも基本的には今までの話から同じように考えられる。一方で、例えば3次元の極座標変換のように、一度は計算をしておいた方がよい例は多い。

多重積分、重積分の応用

累次積分は設定を少し変化させる。

定理 11 累次積分

$$D = \{(x, y, z); (x, y) \in E, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\} \text{ ならば}$$
$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_E \left(\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

系

$$D = \{(x, y, z); a \leq x \leq b, \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x), \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\} \text{ ならば}$$
$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$$
$$= \int_a^b \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \left(\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

多重積分、重積分の応用

例

$D = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ とすると、これは
 $D = \{(x, y, z); -a \leq x \leq a, -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2},$
 $-\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} \leq z \leq \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}\}$ と書けるので

$$\begin{aligned} & \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_{-a}^a \left(\int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} \left(\int_{-\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}^{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx \end{aligned}$$

特に $f(x, y, z) = 1$ ならば D の体積になり

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^a \left(\int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} \left(\int_{-\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}^{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} 1 dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{-a}^a \left(\int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} 2\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} dy \right) dx \end{aligned}$$

多重積分、重積分の応用

ここで $A = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = \sqrt{a^2 - x^2} \sin t = A \sin t$ とすると積分範囲は $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$, $dy = A \cos t dt$ と変換されるので

$$\int_{-A}^A 2\sqrt{A^2 - y^2} dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2A\sqrt{1 - \sin^2 t} A \cos t dt$$

$$= 2A^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \pi A^2$$

I の計算に戻ると

$$I = \int_{-a}^a \pi(a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi a^3$$

になる。

多重積分、重積分の応用

変数変換はヤコビアン J に注意すれば基本的に同じ

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

を使って変数変換するとき 2 変数関数の時と同様に行列式を用いてヤコビアン J を

$$J = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}$$

で定義する。

多重積分、重積分の応用

定理 12

(u, v, w) 空間の領域 E を (x, y, z) 空間の D へ写す写像が 1 対 1 で、 $J \neq 0$ とする。このとき

$$\begin{aligned} & \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_E f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw \end{aligned}$$

多重積分、重積分の応用

例 極座標

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \text{ただし} \quad \begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{ととる。}$$

このときヤコビアンを計算すると

$$\begin{aligned} J &= \det \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \\ &= r^2 \sin \theta \{ (\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) \\ &\quad - (-\cos^2 \theta \sin^2 \varphi - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \} \\ &= r^2 \sin \theta \end{aligned}$$

多重積分、重積分の応用

従って (x, y, z) での領域 D と (r, θ, φ) での領域 E とが対応していれば

$$\begin{aligned} & \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_E f(x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi)) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \end{aligned}$$

特に $f(x, y, z) = 1$, $D = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ とすると、対応する領域は

$E = \{(r, \theta, \varphi); 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ になるので

$$\begin{aligned} & \iiint_D 1 dx dy dz = \iiint_E r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{3} a^3 \end{aligned}$$

多重積分、重積分の応用

曲面の面積のうち特に曲面が $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ と表される
とき以下のように定義する。

定理 13 曲面積

関数 $f(x, y)$ が D 上 C^1 ならば曲面 $f(x, y)$ は曲面積

$$S = \iint_D \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1} dx dy$$

を持つ。

多重積分、重積分の応用

例

$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}, \quad D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

の曲面積を計算する。

$$f_x = -x(a^2 - (x^2 + y^2))^{-1/2}, \quad f_y = -y(a^2 - (x^2 + y^2))^{-1/2} \text{ より}$$

$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - (x^2 + y^2)}}$$

になるので曲面積は

$$S = \iint_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} dx dy$$

極座標変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とすると対応する領域は

$$E = \{0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, \text{ ヤコビアンが } J = r \text{ になり}$$

$$S = \iint_E \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta = 2\pi a^2$$

多重積分、重積分の応用

問題

$f(x, y) = x^2 - y^2$, $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq a^2\}$
で表される曲面の曲面積を求めよ。