基礎数理 AII 第 10 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

1 月 19 日

変数変換

1 変数関数の積分の変数変換
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$
に対応する 2 変数関数の積分の変数変換を取り扱う。

変数変換

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

と変数変換するときに

定義　ヤコビアン

φ, ψ が共に C^1 級のとき

$$J = \det \begin{pmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{pmatrix} = \varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u$$

と定義しヤコビアンと呼ぶ。

注意

J は u, v の関数であることに注意する。

変数変換

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) = au + bv \\ y = \psi(u, v) = cu + dv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

であるが、このとき $J = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ であり、

図形的には 2 つのベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ から作られる平行四辺形の面積と $|J|$ が一致する。

論理に少し飛躍はあるが、重積分の定義が小さな直方体に分割して、底面積に高さをかけて直方体の体積を出していたため、その底面の長方形を平行四辺形に変更したと思えば、この面積の比を表す $|J|$ が変数変換の補正項になりそうである。

実際に次のような定理が成り立つ。

変数変換

定理 9

u, v 平面から x, y 平面への写像

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

が $E \to D$ かつ 1 対 1 で、 E 上 $J \neq 0$ とする。

このとき D 上の連続関数 $f(x, y)$ に対して

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_E f(\varphi(u, v), \psi(u, v))|J|dudv$$ である。

変数変換

注意

実際に変数変換をして積分を計算するには以下を行う
(1) (計算がうまくできる) 変数変換 φ, ψ の組を見つける
(2) D に対応した E を決める
(3) $|J|$ の計算

注意

(1) 変数変換 φ, ψ の組を見つける指針として、
(i) 関数の形から決める
(ii) 領域 E から決める
の 2 パターンが主流である。

変数変換

例

$D=\{(x,y);\ \ -1\leq x+2y\leq 1,\ \ -1\leq x-y\leq 1\}$ に対して

$$\iint_D (x-y)^2 dxdy$$

を計算するのに、累次積分で計算することも可能であるが、D の形状から、

$$\begin{cases} u = x+2y \\ v = x-y \end{cases}$$

となるような変数変換をとれば

$E=\{(u,v);\ \ -1\leq u\leq 1, -1\leq v\leq 1\}$

になる。逆算して

$$\begin{cases} x=\varphi(u,v)=\dfrac{1}{3}(u+2v) \\ y=\psi(u,v)=\dfrac{1}{3}(u-v) \end{cases}$$

になるので

変数変換

$$J = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}$$

従って

$$\iint_D (x-y)^2 dxdy = \iint_E v^2 |J| dudv = \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} \Big(\int_{-1}^{1} v^2 dv \Big) du = \frac{4}{9}$$

変数変換

$D=\{(x,y);\ x^2+y^2\leq a^2,\ x\geq 0, y\geq 0\}$ として

$$\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$$

を計算する。これも頑張れば累次積分で計算できるが、かなり大変。

極座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

とすると対応する領域は

$$E=\{(r,\theta);\ 0\leq r\leq a,\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\}$$

となり、ヤコビアンを計算すると

$$J=\det\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$$

変数変換

従って

$$\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy = \iint_E \sqrt{a^2 - r^2}rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}rdr = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{3/2}\right]_0^a = \frac{\pi}{6}a^3$$

変数変換

問題

次の重積分を計算せよ

(1) $D_1 = \{(x, y);\ x \geq 0, y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$ として

$$\iint_{D_1} \cos(x+y)\sin(x-y)dxdy$$

(2) $D_2 = \{(x, y);\ b^2 \leq x^2 + y^2 \leq B^2,\ x + y \geq 0,\ x - y \geq 0\}$ として

$$\iint_{D_2} \frac{x}{x^2+y^2}dxdy$$