基礎数理 AII 第 9 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

1 月 12 日

累次積分

前回積分領域が長方形の場合、重積分は 1 変数関数を 2 回積分すれば計算できることが分かった。
一方で多くの場合積分領域は長方形では表されず、
$D = \{(x, y);\ a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$
のような形で境界を表す関数を使って表される。
このような場合でも重積分の定義を考えれば、1 変数関数の 2 回の積分に書き換えられることを見る。

累次積分

領域 D は
$D = \{(x, y);\ a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$
とするが $c \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq d$ とする。
この仮定から長方形 $A = [a, b] \times [c, d]$ ととれば $D \subset A$ であり、
D 上で定義された関数 $f(x, y)$ の積分は

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

として

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_A \tilde{f}(x, y)dxdy$$

と定義した。
A は長方形であるので 1 変数関数の積分を 2 回使って書けるが、
特に先に y について積分する形で書き直してみる。

累次積分

$$\iint_A \tilde{f}(x,y)dxdy = \int_a^b \Big(\int_c^d \tilde{f}(x,y)dy \Big) dx$$

x を止める毎に括弧の中を $c \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq d$ を使って 3 つの積分に分けると

$$\int_c^d \tilde{f}(x,y)dy$$

$$= \int_c^{\varphi_1(x)} \tilde{f}(x,y)dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \tilde{f}(x,y)dy + \int_{\varphi_2(x)}^{d} \tilde{f}(x,y)dy$$

と書けるが第 1,3 項の y の範囲では $\tilde{f}(x,y) = 0$ になるため、積分も 0 になり、結果的に第 2 項だけが残ることになる。

さらに第 2 項の y の範囲では $\tilde{f}(x,y) = f(x,y)$ になる。このことから

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \Big) dx$$

と書けることが分かる。

累次積分

境界が x の関数で書ける場合を考えたが、y の関数で書ける場合も同様に
$D = \{(x, y);\ c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$
ただし $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$ の場合は
$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \Big(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx\Big)dy$$
と書ける。
これらをまとめて次の定理とする。

累次積分

定理 7

(1) $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ とし、
$D = \{(x, y);\ a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ とする。このとき
$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \Big) dx$$
(2) $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ とし、
$D = \{(x, y);\ c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$ とする。このとき
$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \Big(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx \Big) dy$$

累次積分

例

$D = \{(x,y); 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$ として

$$\iint_D xy^2\,dxdy = \int_0^1 \Big(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy^2\,dy \Big) dx$$

$$= \int_0^1 \Big[\frac{1}{3}xy^3 \Big]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{6}\int_0^1 (1-x^2)^{3/2}(-2x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{6}\Big[\frac{2}{5}(1-x^2)^{5/2} \Big]_0^1 = \frac{1}{15}$$

累次積分

$D = \{(x, y);\ y^2 \leq x \leq y + 2\}$ とする。
このとき $D = \{(x, y);\ -1 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq y + 2\}$ と書き直せるので
$\iint_D ydydx = \int_{-1}^{2} \left(\int_{y^2}^{y+2} ydx \right) dy = \int_{-1}^{2} y^2 + 2y - y^3 dy$
$= \left[-\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{3}y^3 + y^2 \right]_{-1}^{2} = \frac{9}{4}$

累次積分

定理 8

$$D = \{(x,y);\ a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$
$$= \{(x,y);\ c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$$

と 2 通りで書き表される場合

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$
$$= \int_a^b \Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \Big) dx$$
$$= \int_c^d \Big(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx \Big) dy$$

である。

累次積分

例

$$I=\int_0^{\pi/2}\Big(\int_{2y/\pi}^1 \cos\frac{y}{x}dx\Big)dy$$

とすると $\displaystyle\int \cos\frac{c}{x}dx$ 計算できない。

一方で積分領域は

$$\begin{aligned}D&=\{(x,y);\ 0\le y\le\frac{\pi}{2},\frac{2y}{\pi}\le x\le 1\}\\&=\{(x,y);\ 0\le x\le 1, 0\le y\le\frac{\pi}{2}x\}\end{aligned}$$

と 2 通りに書けるので、積分の順序交換をして

$$I=\int_0^1\Big(\int_0^{\pi x/2}\cos\frac{y}{x}dy\Big)dx=\int_0^1\Big[x\sin\frac{y}{x}\Big]_{y=0}^{\pi x/2}dx=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$$

と全体としては計算可能である。

累次積分

問題

次の重積分を計算せよ

(1) D_1 を $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,3)$ を頂点とする三角形の内部とするとき

$$\iint_{D_1} xy \ dxdy$$

(2) $D_2 = \{(x,y);\ x^2 - 2 \leq y \leq x\}$ とするとき

$$\iint_{D_2} xy \ dxdy$$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{y^{1/2}}^{y^{1/3}} \exp \frac{y}{x} dx \right) dy$