

基礎数理 AII 第 8 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

1 月 8 日

重積分

重積分の定義は1変数の積分と同じように体積を通して定義する。
長方形 $A = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y); a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ とする。
この長方形 A を軸に沿って長方形で分割する。

分割 Δ (の分点の x, y 座標) を

$$\Delta: \begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \\ c &= y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d \end{aligned}$$

としこの分割された長方形の1つを

$\Delta_{ij} \{(x, y); x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$ と書き、これらの長方形の面積の最大値を

$|\Delta| = \max\{|x_i - x_{i-1}| |y_j - y_{j-1}|; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ と書く。
1変数関数の積分の時と同様に $S(f; \Delta)$, $s(f; \Delta)$ を以下で定める

$$S(f; \Delta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |x_i - x_{i-1}| |y_j - y_{j-1}| \sup_{(x,y) \in \Delta_{ij}} f(x, y)$$

$$s(f; \Delta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |x_i - x_{i-1}| |y_j - y_{j-1}| \inf_{(x,y) \in \Delta_{ij}} f(x, y)$$

重積分

このとき

$$\lim_{|\delta| \rightarrow 0} S(f; \Delta) = S, \quad \lim_{|\delta| \rightarrow 0} s(f; \Delta) = s$$

が存在することが分かり $S \geq s$ である。

定義 重積分

上で定めた S, s に対して $S = s$ になった時、関数 $f(x, y)$ は A 上可積分で

$$\iint_A f(x, y) dx dy = S$$

と書く。

重積分

長方形 A に対して $B \subset A$ とする。

$$I_B(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } (x, y) \in B \\ 0 & \text{if } (x, y) \notin B \end{cases}$$

を B の定義関数と呼ぶ。

定義 面積

上で定めた $I_B(x, y)$ が A 上可積分であれば、

$$\iint_A I_B(x, y) dx dy$$

を B の面積と呼び、 $|B|$ と書く。

重積分

長方形でない領域 B に対して定義される関数 $f(x, y)$ に対して $B \subset A$ となるような長方形 A を取り、

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{if } (x, y) \in B \\ 0 & \text{if } (x, y) \notin B \end{cases}$$

と取る。

定義 重積分

上で定めた $\tilde{f}(x, y)$ が A 上可積分であれば、関数 $f(x, y)$ は B 上可積分で

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_A \tilde{f}(x, y) dx dy$$

と書く。

重積分

1 変数関数の定積分と同じような性質が成り立つ。

定理 1

連続関数 $f(x, y)$ は可積分である。

定理 2

関数 $f(x, y), g(x, y)$ は D 上可積分、 k は定数とする。

(1)

$$\iint_D \{f(x, y) \pm g(x, y)\} dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy \pm \iint_D g(x, y) dx dy$$

(2)
$$\iint_D kf(x, y) dx dy = k \iint_D f(x, y) dx dy$$

定理 3

関数 $f(x, y)$, は D, D_1, D_2 上可積分、 $D = D_1 \cup D_2$ かつ $D_1 \cap D_2$ の面積が 0 のとき

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

である。

定理 4

関数 $f(x, y), g(x, y)$ は D 上可積分 $f(x, y) \geq g(x, y)$ とする。

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy$$

である。特に $g(x, y) = 0$ として

$f(x, y) \geq 0$ ならば

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0$$

系

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy$$

定理 5

D は領域とする。関数 $f(x, y)$ が D 上連続であれば、

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) |D|$$

となる $(\xi, \eta) \in D$ が存在する。 $\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0$

重積分

1 変数関数の時もこのような定義にすると、多くの関数で定積分が可能になったが、一方で定義通りに計算することが困難で、微積分学の基本定理を通して、微分との関係を使うことで、計算が容易にできるようになった。

2 変数関数の積分も同様に次の定理により、結果的に 1 変数関数の定積分を使って計算できることになる。

重積分

長方形領域 $A = [a, b] \times [c, d]$ とする。

2 変数関数 $f(x, y)$ の x を止める毎に (x をパラメータと思い) y の関数として

$$g(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

とする。

同様に y を止める毎に (y をパラメータと思い) x の関数として

$$h(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

とする。

これらの関数をそれぞれの変数で積分すると

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

$$\int_a^b h(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

重積分

この2つは定義上異なるものであり、先に定義した長方形 A 上の定積分とも異なる。しかし次の事実から重積分を計算することができる。

定理 6

関数 $f(x, y)$ が連続であれば、

$$\begin{aligned}\iint_A f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy\end{aligned}$$

重積分

例

$D = [0, 2] \times [0, 1]$ として、 y を先に積分すれば、

$$\begin{aligned}\iint_D xy(x-y) dx dy &= \int_0^2 \left(\int_0^1 xy(x-y) dy \right) dx \\ &= \int_0^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 - \frac{1}{3} x y^3 \right]_{y=0}^1 dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x \right) dx = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

逆に x を先に積分すれば

$$\begin{aligned}\iint_D xy(x-y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^2 xy(x-y) dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} x^3 y - \frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{x=0}^2 dy = \int_0^1 \left(\frac{8}{3} y - 2 y^2 \right) dy = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

と当然同じ値が出る。

実際に計算するときには簡単な方を選んで計算すればよいが、両方計算しないとどちらが簡単だったかは分からない。

問題

$A = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$ とする。

$$\iint_A \sin(x + \frac{y}{2}) dx dy$$

を求めよ。