

基礎数理 AII 第 7 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

12 月 25 日

地図などで、ある点 (x, y) での標高を表す関数 $G(x, y)$ があった時に、 $F(x, y) = G(x, y) - a$ として $F(x, y) = 0$ を満たす点全体を考えると、それは、標高 a の地点全体になり、(特定の高さ a だけになるが) 地図上等高線として描かれている。全ての点を見ることは無理でも、その一部分をうまく取り出すと $F(x, f(x)) = 0$ となるような 1 変数関数 $f(x)$ を取り出すことができる。この関数 f の性質を F の性質を使って書き表すことを考える。

定義

ある区間 I で定義された関数 $f(x)$ が $F(x, f(x)) = 0$ を満たすとき $f(x)$ を $F(x, y) = 0$ の定める陰関数と呼ぶ。

例

$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ とすると、
 $y = \sqrt{1 - x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1), \quad y = -\sqrt{1 - x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$
は共に F の定める陰関数になる。

定理 15

関数 $F(x, y)$ は C^1 級とし、 $F(a, b) = 0$, $F_y(a, b) \neq 0$ とする。
このとき $x = a$ を含む開集合 I で定義された C^1 級関数 $f(x)$ が存在して

$$f(a) = b, \quad F(x, f(x)) = 0 \quad (x \in I)$$

を満たすものがただ 1 つ存在する。

さらに

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

後半部の微分に関しては次のように簡単に導出できる。

$$0 = \frac{d}{dx} F(x, f(x)) = F_x(x, f(x)) + f'(x) F_y(x, f(x))$$

から簡単に計算できる。

例

$F(x, y) = x^3y^3 + 3y - 3x$ とすると $F(0, 0) = 0$ であるので定理 15 を適用してみる。

$F_x = 3x^2y^3 - 3$, $F_y = 3x^3y^2 + 3$ より

F の定める陰関数 f の微分は

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} = -\frac{x^2(f(x))^3 - 1}{x^3(f(x))^2 + 1}$$

となる。

命題 接線と法線

関数 $F(x, y)$ は C^1 級とし、 $F(a, b) = 0$, $F_y(a, b) \neq 0$ とする。
このとき $F(x, y)$ の定める陰関数の (a, b) での接線と法線はそれぞれ

$$\text{接線 } y = -\frac{F_x(a, b)}{F_y(a, b)}(x - a) + b$$

$$\text{もしくは } F_x(a, b)(x - a) + F_y(a, b)(y - b) = 0$$

$$\text{法線 } F_y(a, b)(x - a) - F_x(a, b)(y - b) = 0$$

陰関数

陰関数の極値を考える。

先ほど陰関数 f の微分で

$$0 = \frac{d}{dx} F(x, f(x)) = F_x(x, f(x)) + f'(x) F_y(x, f(x))$$

から簡単に計算できるとしたが、この両辺をさらに x で微分して

$$0 = \frac{d^2}{dx^2} F(x, f(x))$$

$$= F_{xx}(x, f(x)) + 2f'(x)F_{xy}(x, f(x)) \\ + f''(x)F_y(x, f(x)) + (f'(x))^2 F_{yy}(x, f(x))$$

と書けるがこれから f'' を書くのは大変であるが、極値を考えているので $f'(x) = 0$ としてよい。この条件の下で

$$f''(x) = -\frac{F_{xx}(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

と書けるので、1 変数関数に対する極値の判定を適用すると

定理 18

関数 $F(x, y)$ は C^1 級とし、 $F(a, b) = 0$, $F_y(a, b) \neq 0$ とする。
 $F(x, y)$ の定める陰関数 $f(x)$ が $x = a$ で極値 $f(a) = b$ をとるならば

$F_x(a, b) = 0$ でありさらに

$\frac{F_{xx}(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} > 0$ であれば極大

$\frac{F_{xx}(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} < 0$ であれば極小

理工系の分野では条件を付けた下での極小値が重要になる。
例えばこのスライドの最初に挙げた例でいえば標高 a である地点は $g(x, y) = F(x, y) = 0$ で与えられたが、同時に $f(x, y)$ としてそれぞれの地点での気温としたときに、標高 a である地点の中での気温の最大値、最小値、またその地点 (a, b) を知りたい。
一見話が複雑すぎて、何もできなさそうであるが、次のような方法で求めることができる。

定理 19 ラグランジュの乗数法

関数 $f(x, y)$, $g(x, y)$ は C^1 級とする。

条件 $g(x, y) = 0$ の下での $z = f(x, y)$ が (a, b) で極値をとるならば

$$(1) \quad g_x(a, b) = g_y(a, b) = 0$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} f_x(a, b) \\ f_y(a, b) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} g_x(a, b) \\ g_y(a, b) \end{pmatrix}$$

を満たす λ が存在する。

問題

$F(x, y) = x^4 y^4 + 4x - 4y$ とする。

この関数の定める陰関数 $f(x)$ の微分 $f'(x)$ を計算し、 $x = 0$ での接線を求めよ。

$f'(x)$ の結果に $f(x)(= y)$ が残っても構わない。