

基礎数理 AII 第 6 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

12 月 22 日

偏微分の応用：極値について

理工系の分野において、局所的な最大、最小は大きな意味を持っていることが多い。1変数関数の時と比べて2変数関数では、異なった様相を見せることがある。

偏微分の応用：極値について

定理 16

関数 $f(x, y)$ が偏微分可能で、 (a, b) で極値をとるならば
 $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$

定義

$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ を満たす (a, b) を特異点と呼ぶ。

ここまでは1変数関数の時と同じで、極値を取る点を探すには、まず偏微分が0になる点を探せばよい。
一方で次から2変数関数では異なった様相を見せるが、以下の3つの例が典型的な例になる。

偏微分の応用：極値について

例1 $f(x, y) = x^2 + y^2$ のケース

このとき $f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = 2y$ なので特異点は $(0, 0)$ だけであり、 $f(0, 0) = 0$ また $(0, 0)$ 以外で $f(x, y) > 0$ であるので $(0, 0)$ で極小になる。

例2 $f(x, y) = -x^2 - y^2$ のケース

このとき $f_x(x, y) = -2x$, $f_y(x, y) = -2y$ なので特異点は $(0, 0)$ だけであり、 $f(0, 0) = 0$ また $(0, 0)$ 以外で $f(x, y) < 0$ であるので $(0, 0)$ で極大になる。

例3 $f(x, y) = x^2 - y^2$ のケース

このとき $f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = -2y$ なので特異点は $(0, 0)$ だけであり、 $f(0, 0) = 0$ また $(0, 0)$ 以外で $f(x, 0) > 0$ であるので $(0, 0)$ で極小になりそうだが、同様に $(0, 0)$ 以外で $f(0, y) < 0$ であるので、
 $(0, 0)$ で極小でも極大でもない。

偏微分の応用：極値について

注意

例3のケースのようにある方向 (x 軸方向) に関しては極小、別の方向に対しては (y 軸方向) に関しては極大となる点をその形状から、鞍点、峠の点などと呼ぶ。

先に挙げた、3つのケースが典型例であると述べたが、テイラー展開を用いた方法で、実際にこの3種類に分類できることが以下のように分かる。

偏微分の応用：極値について

(簡単のため) $f(0,0) = 0$ とし、 $(0,0)$ が $f(x,y)$ の特異点とする。
このため $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ でもある。

$f(x,y)$ を $(0,0)$ で 2 次までテイラー展開してみると

$$f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y \\ + \frac{1}{2}f_{xx}(0,0)x^2 + f_{xy}(0,0)xy + \frac{1}{2}f_{yy}(0,0)y^2 + \dots$$

条件を使えば 1 行目が消えるが、さらに次のようにも書ける (ただし $(1,1)$ 行列をスカラーとみなす)

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x,y) \begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \dots$$

偏微分の応用：極値について

命題

対称行列は直交行列で対角化できる。すなわち $\exists P$ s.t. ${}^tP = P^{-1}$ かつ ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ つまり $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} {}^tP$ となる。

さらに 2次元の場合はある θ があって

$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ と取れる。

この命題を適用してみると $\exists \lambda_1, \lambda_2, \theta$ s.t.

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

偏微分の応用：極値について

従って

$${}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta x + \sin \theta y \\ -\sin \theta y + \cos \theta x \end{pmatrix}$$

と書けるが、これを変数変換とみて

$${}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta x + \sin \theta y \\ -\sin \theta y + \cos \theta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

と書くことにすれば

$$(x, y) \begin{pmatrix} f_{xx}(0, 0) & f_{xy}(0, 0) \\ f_{xy}(0, 0) & f_{yy}(0, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (u, v) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$$

と書き直せる。すなわち

$f(x, y) = \frac{1}{2}(\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2) + \dots$ と書け、変数変換した (u, v) で見れば、 λ_1, λ_2 の符号により、先に挙げた3つのケースに分類できる。

偏微分の応用：極値について

命題

この計算の設定の下で、 $(0,0)$ は

λ_1, λ_2 共に正の場合極小になり

λ_1, λ_2 共に負の場合極大になり

λ_1, λ_2 の符号が異なればどちらでもない。

等号が入った場合、テーラー展開の3次(以上)の項を見る必要がある。

命題

3変数以上の関数に関してもこの命題はそのまま適用可能で、2回の偏微分で作る対称行列の固有値が

全て正ならば極小

全て負ならば極大

正、負の固有値がそれぞれ1つずつ以上あればどちらでもない。

偏微分の応用：極値について

2 変数関数に限れば、固有値を計算しなくても、符号の情報だけは得られるので次のような結果が得られる。

定理 17

関数 $f(x, y)$ は (a, b) の近傍で C^2 級であり (a, b) は特異点とする。

$$D = (f_{xy}(a, b))^2 - f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b)$$

とおくとき、関数 $f(x, y)$ は (a, b) で

- (1) $D < 0$ かつ $f_{xx}(a, b) > 0$ ならば極小
- (2) $D < 0$ かつ $f_{xx}(a, b) < 0$ ならば極大
- (3) $D > 0$ ならばどちらでもない。

偏微分の応用：極値について

注意

定理 17 に出てくる D は 2 回の偏微分から作られた行列の行列式を -1 倍したものである。

この行列自体、ヘッセ行列、ヘシアンなどと呼ばれ、幾何学的に重要なものである。

偏微分の応用：極値について

例

$f(x, y) = xy(2 - x - y)$ に適用してみる。

$$f_x = 2y - 2xy - y^2, \quad f_y = 2x - x^2 - 2xy$$

$$f_{xx} = -2y, \quad f_{xy} = 2 - 2x - 2y, \quad f_{yy} = -2x$$

これより特異点は $f_x = f_y = 0$ を解いて

$(0, 0), (2/3, 2/3), (0, 2), (2, 0)$ になる。

$D = f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}$ であるので

$(0, 0)$ では $D = 4 > 0$ つまりどちらでもない。

$(2/3, 2/3)$ では $D = -4/3 < 0, f_{xx} = -4/3 < 0$ より極大

$(0, 2)$ では $D = 4 > 0$ よりどちらでもない。

$(2, 0)$ では $D = 4 > 0$ よりどちらでもない。

偏微分の応用：極値について

問題

$$f(x, y) = x^3 + y^2 + 2xy + y$$

について特異点を求め、それらの点を、極大、極小、どちらでもないに分類せよ。