

基礎数理 AII 第 5 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

12 月 18 日

テイラーの定理

1 変数関数の時も、良い関数が与えられたとき、分かりやすい多項式で近似を行った。2 変数関数の時の対応するものを与える。

テイラーの定理

定義 方向微分

$h^2 + k^2 = 1$ として

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + ht, b + kt) - f(a, b)}{t}$$

が存在したら (h, k) 方向に、方向微分可能と呼ぶ。

注意

$(h, k) = (1, 0)$ の時の方向微分は x に関する偏微分になり、
 $(h, k) = (0, 1)$ の時の方向微分は y に関する偏微分になる。

テイラーの定理

補題 (例 1.6)

$f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能であれば全ての方向に対して方向微分可能で

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + ht, b + kt) - f(a, b)}{t} = hf_x(a, b) + kf_y(a, b)$$

注意

各方向に対して方向微分を考えるの自然であるが、結果的に全微分可能な関数であれば、偏微分 (x, y 軸方向) だけ考えれば十分である。

テイラーの定理

1 変数関数の時のライプニッツの定理に対応する公式

補題

$f(x, y)$ は C^n 級関数とする。 a, b, h, k を定数として
 $F(t) = f(a + ht, b + kt)$ とおくと $F(t)$ は C^n 級関数で

$$\begin{aligned} F^{(m)}(t) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(a + ht, b + kt) \\ &= \sum_{j=0}^m {}_m C_j h^{m-j} k^j \frac{\partial^m}{\partial x^{m-j} \partial y^j} f(a + ht, b + kt) \end{aligned}$$

テイラーの定理

定理 12 テイラーの定理

$f(x, y)$ は D 上 C^n 級関数で、 D 内の 2 点 $(a, b), (a + h, b + k)$ を結ぶ線分が D に含まれれば

$f(a + h, b + k)$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(a, b) \\ + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + \theta h, b + \theta k)$$

となるような $0 < \theta < 1$ が存在する。

テイラーの定理

実際に展開を 3 次まで書いてみる

$$f(a+h, b+k)$$

$$= f(a, b) + hf_x(a, b) + kf_y(a, b)$$

$$+ \frac{1}{2}h^2f_{xx}(a, b) + hkf_{xy}(a, b) + \frac{1}{2}k^2f_{yy}(a, b)$$

$$+ \frac{1}{6}h^3f_{xxx}(a, b) + \frac{1}{2}h^2kf_{xxy}(a, b) + \frac{1}{2}hk^2f_{xyy}(a, b) + \frac{1}{6}k^3f_{yyy}(a, b)$$

$$+ \dots$$

テイラーの定理

例

$f(x, y) = e^x \cos y$ を $(0, 0)$ で 3 次までテーラー展開してみる。

$$f_x = e^x \cos y, \quad f_y = -e^x \sin y$$

$$f_{xx} = e^x \cos y, \quad f_{xy} = -e^x \sin y, \quad f_{yy} = -e^x \cos y$$

$$f_{xxx} = e^x \cos y, \quad f_{xxy} = -e^x \sin y, \quad f_{xyy} = -e^x \cos y,$$

$$f_{yyy} = e^x \sin y$$

$$\text{これより } f(0, 0) = 1, f_x(0, 0) = 1, f_y(0, 0) = 0,$$

$$f_{xx}(0, 0) = 1, f_{x,y}(0, 0) = 0, f_{yy}(0, 0) = -1,$$

$$f_{xxx}(0, 0) = 1, f_{xxy}(0, 0) = 0, f_{xyy}(0, 0) = -1, f_{yyy}(0, 0) = 0$$

従って

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}xy^2 + \dots$$

テイラーの定理

例

$f(x, y) = e^{x+y} \cos(x - y)$ を $(0, 0)$ で 3 次までテーラー展開してみる。

$$f_x = e^{x+y} \cos(x - y) - e^{x+y} \sin(x - y)$$

$$f_y = e^{x+y} \cos(x - y) + e^{x+y} \sin(x - y)$$

$$f_{xx} = -2e^{x+y} \sin(x - y)$$

$$f_{xy} = 2e^{x+y} \cos(x - y)$$

$$f_{yy} = 2e^{x+y} \sin(x - y)$$

$$f_{xxx} = -2e^{x+y} \cos(x - y) - 2e^{x+y} \sin(x - y)$$

$$f_{xxy} = 2e^{x+y} \cos(x - y) - 2e^{x+y} \sin(x - y)$$

$$f_{xyy} = 2e^{x+y} \cos(x - y) + 2e^{x+y} \sin(x - y)$$

$$f_{yyy} = -2e^{x+y} \cos(x - y) + 2e^{x+y} \sin(x - y)$$

$$\text{これより } f(0, 0) = 1, f_x(0, 0) = 1, f_y(0, 0) = 1,$$

$$f_{xx}(0, 0) = 0, f_{x,y}(0, 0) = 2, f_{yy}(0, 0) = 0,$$

$$f_{xxx}(0, 0) = -2, f_{xxy}(0, 0) = 2, f_{xyy}(0, 0) = 2, f_{yyy}(0, 0) = -2$$

テイラーの定理

したがって

$$f(x, y) = 1 + x + y + 2xy - \frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 - \frac{1}{3}y^3 + \cdots$$

と展開できる。

問題

次の関数を $(0, 0)$ で 2 次までテーラー展開せよ。

$$f(x, y) = e^{x+y} \sin(x - y), \quad g(x, y) = e^{x-y} \log \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

テイラーの定理

定理 13 平均値の定理

関数 $f(x, y)$ が D 上 C^1 級で線分 $(a, b), (a + h, b + k)$ が D に含まれれば、

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) - f(a, b) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a + \theta h, b + \theta k) \\ &= h f_x(a + \theta h, b + \theta k) + k f_y(a + \theta h, b + \theta k) \end{aligned}$$

となる $0 < \theta < 1$ が存在する。