基礎数理 AII 第 4 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

12 月 15 日

合成関数の微分

1 変数関数の場合 $(f(\varphi(x)))' = \varphi'(x)f'(\varphi(x))$ と計算できたが、2 変数の場合の対応する公式を考える。ただし 3 パターン考えられることに注意する。

(1) $f(x,y)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ として（結果的に）1 変数関数となる合成関数 $F(t) = f(\varphi(t),\psi(t))$ の t での微分。

(2) $f(x)$, $\varphi(t,s)$ として（結果的に）2 変数関数となる合成関数 $F(t,s) = f(\varphi(t,s))$ の t,s での偏微分。

(3) $f(x,y)$, $\varphi(t,s)$, $\psi(t,s)$ として（結果的に）2 変数関数となる合成関数 $F(t,s) = f(\varphi(t,s),\psi(t,s))$ の t,s での偏微分。

例えば (2) のケースは（実際問題として）すでに使っている。

合成関数の微分

(2) のケース

命題

$f(x)$ が微分可能、 $\varphi(t,s)$ は (a,b) で偏微分可能であれば、合成関数 $f(\varphi(t,s))$ も (a,b) で偏微分可能で、

$$\frac{\partial}{\partial x} f(\varphi(a,b)) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(a,b) f'(\varphi(a,b))$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(\varphi(a,b)) = \frac{\partial}{\partial y}\varphi(a,b) f'(\varphi(a,b))$$

になる。

合成関数の微分

(1) のケース

定理 10

$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能、 $\varphi(t),\psi(t)$ は t_0 で微分可能で、$\varphi(t_0)=a,\psi(t_0)=b$ であれば、合成関数 $f(\varphi(t),\psi(t))$ も $t=t_0$ で微分可能で、

$$\frac{d}{dt}f(\varphi(t_0),\psi(t_0))$$
$$=\varphi'(t_0)\frac{\partial}{\partial x}f(\varphi(t_0),\psi(t_0))+\psi'(t_0)\frac{\partial}{\partial y}f(\varphi(t_0),\psi(t_0))$$
$$=\varphi'(t_0)\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)+\psi'(t_0)\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)$$

になる。

変数を省略して

$z=f(x,y),\quad x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$ として次のようにも書く

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

合成関数の微分

(3) のケース

定理 11(続く)

$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能、 $\varphi(t,s),\psi(t,s)$ は (t_0,s_0) で偏微分可能で、$\varphi(t_0,s_0)=a,\psi(t_0,s_0)=b$ であれば、合成関数 $f(\varphi(t,s),\psi(t,s))$ も $(t,s)=(t_0,s_0)$ で微分可能で、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}f(\varphi(t_0,s_0),\psi(t_0,s_0))\\
&=\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t_0,s_0)\frac{\partial}{\partial x}f(\varphi(t_0,s_0),\psi(t_0,s_0))\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial t}\psi(t_0,s_0)\frac{\partial}{\partial y}f(\varphi(t_0,s_0),\psi(t_0,s_0))\\
&=\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t_0,s_0)\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)+\frac{\partial}{\partial t}\psi(t_0,s_0)\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)
\end{aligned}
$$

になる。

合成関数の微分

定理 11(続き)

同様に

$$\frac{\partial}{\partial s}f(\varphi(t_0,s_0),\psi(t_0,s_0))$$
$$=\frac{\partial}{\partial s}\varphi(t_0,s_0)\frac{\partial}{\partial x}f(\varphi(t_0,s_0),\psi(t_0,s_0))$$
$$+\frac{\partial}{\partial s}\psi(t_0,s_0)\frac{\partial}{\partial y}f(\varphi(t_0,s_0),\psi(t_0,s_0))$$
$$=\frac{\partial}{\partial s}\varphi(t_0,s_0)\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)+\frac{\partial}{\partial s}\psi(t_0,s_0)\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)$$

になる。

変数を省略して

$z=f(x,y),\quad x=\varphi(t,s),\quad y=\psi(t,s)$ として次のようにも書く

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},\quad \frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

合成関数の微分

注意

1 変数関数の場合もそうであったように、合成関数の、高次の微分、偏微分は、この公式を繰り返す。このためかなり大変になることが多い。

合成関数の微分

例

$f(x,y) = (x+y)^n$, $\varphi(t,s) = t - s$, $\psi(t,s) = ts$ として
$z(t,s) = f(\varphi(t,s), \psi(t,s))$ とする。
この程度の関数であれば直接計算することで
$z_t = (\{(t-s)+ts\}^n)_t = (1+s)n\{(t-s)+ts\}^{n-1}$
$z_s = (\{(t-s)+ts\}^n)_s = (-1+t)n\{(t-s)+ts\}^{n-1}$
と計算できてしまう。
一方で公式を使ってみると
$f_x = n(x+y)^{n-1}$, $\varphi_t = 1$, $\varphi_s = -1, \psi_t = s, \psi_s = t$ であるので
$z_t = n\{(t-s)+ts\}^{n-1} \times 1 + n\{(t-s)+ts\}^{n-1} \times s =$
$n\{(t-s)+ts\}^{n-1}(1+s)$
$z_s = n\{(t-s)+ts\}^{n-1} \times (-1) + n\{(t-s)+ts\}^{n-1} \times t =$
$n\{(t-s)+ts\}^{n-1}(-1+t)$
と同じ結果を得る。
使う関数が複雑になった場合には公式を使った方が便利な場合も多く、抽象的な計算をするときには公式が必要になる。

合成関数の微分

例
例えば、電磁気学の問題として、電場などを考えると、
$\Delta f(x, y, z) = 0$ を満たし、球対称な関数 $f(x, y, z)$ を求める問題になる。
少し問題を簡単にして、3 次元を 2 次元に直して
$\Delta f(x, y) = 0$ を満たし、球対称な関数 $f(x, y)$ を求める問題を考えよう。(実際はこれに境界条件を付けないと、電磁気学の問題としては不十分)
球対称な関数を求めるので、極座標に変換する。
$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$
$z = f(x, y)$ に対して、次の等式が成り立つ。

命題

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

合成関数の微分

この命題の証明が、この授業としては本題であるが、とりあえずこの命題を認めると、考えたい問題は
$\Delta z = 0$ かつ、球対称な関数であった。
球対称であれば $\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = 0$ (実際は $\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = 0$) であるので、

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} = 0$$

と実際には 1 変数関数の微分方程式の解を求める問題になることが分かった。
一般的に 2 変数関数の微分方程式（偏微分方程式）は 1 変数の微分方程式 (常微分方程式) に比べてはるかに難しい問題なので、この命題が非常に約にたったことが分かる。
ちなみにこの方程式の解は $C_1 \log r + C_2$ になる。

合成関数の微分

命題の証明

極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ より

$x_r = \cos\theta, x_\theta = -r\sin\theta,\ y_r = \sin\theta, y_\theta = r\cos\theta$ である。

合成関数の微分公式を使えば

$$z_r = z_x x_r + z_y y_r = z_x\cos\theta + z_y\sin\theta$$

$$\begin{aligned} z_{rr} &= (z_r)_r \\ &= \{(z_x)_x x_r + (z_x)_y y_r\}\cos\theta + z_x(\cos\theta)_r \\ &\quad + \{(z_y)_x x_r + (z_y)_y y_r\}\sin\theta + z_y(\sin\theta)_r \\ &= z_{xx}\cos^2\theta + 2z_{xy}\sin\theta\cos\theta + z_{yy}\sin^2\theta \end{aligned}$$

$$z_\theta = z_x x_\theta + z_y y_\theta = -z_x r\sin\theta + z_y r\cos\theta$$

$$\begin{aligned} z_{\theta\theta} &= (z_\theta)_\theta \\ &= -\{(z_x)_x x_\theta + (z_x)_y y_\theta\} r\sin\theta - z_x(r\sin\theta)_\theta \\ &\quad + \{(z_y)_x x_\theta + (z_y)_y y_\theta\} r\cos\theta + z_y(r\cos\theta)_\theta \\ &= z_{xx}r^2\sin^2\theta - 2z_{xy}r^2\sin\theta\cos\theta + z_{yy}r^2\cos^2\theta - z_x r\cos\theta - z_y r\sin\theta \end{aligned}$$

と計算できる。

合成関数の微分

これより命題の右辺側を書き直せば、

$$
\begin{aligned}
&\text{右辺} = z_{rr} + \frac{1}{r} z_r + \frac{1}{r^2} z_{\theta\theta} \\
&= z_{xx} \cos^2\theta + 2 z_{xy} \sin\theta\cos\theta + z_{yy} \sin^2\theta \\
&\quad + \frac{1}{r} \{ z_x \cos\theta + z_y \sin\theta \} \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \Big\{ z_{xx} r^2 \sin^2\theta - 2 z_{xy} r^2 \sin\theta\cos\theta + z_{yy} r^2 \cos^2\theta \\
&\qquad - z_x r \cos\theta - z_y r \sin\theta \Big\} \\
&= z_{xx} + z_{yy} = \text{左辺}
\end{aligned}
$$

と計算でき、命題が証明された。

合成関数の微分

問題

$f(x,y) = \log(x+y) - \log(x-y), \quad \varphi(t,s) = te^s, \quad \psi(t,s) = e^{ts}$
とするとき以下を求めよ。
$\dfrac{\partial}{\partial t} f(\varphi(t,s), \psi(t,s)), \quad \dfrac{\partial}{\partial s} f(\varphi(t,s), \psi(t,s))$

合成関数の微分

問題（続く）

$x+y=e^{u+v}, x-y=e^{u-v}, z=f(x,y)$ に関して
$z_{xx}-z_{yy}=e^{-2u}(z_{uu}-z_{vv})$
を証明せよという問題に対して，N 君は次のような解答をした．
$x+y=e^{u+v}, x-y=e^{u-v}$ を変形すると次のようになる

$$x=\frac{e^{u+v}+e^{u-v}}{2}, \quad y=\frac{e^{u+v}-e^{u-v}}{2}$$

これらをそれぞれ u,v で偏微分することで次のようになる

$$x_u=x, \quad x_v=y, \quad y_u=y, \quad y_v=x$$

これをふまえて z_u, z_{uu}, z_v, z_{vv} をそれぞれ計算すると，

$$z_u=z_x x+z_y y, \quad z_{uu}=z_{xx}x^2+z_{yy}y^2+z_x x+z_y y$$
$$z_v=z_x y+z_y x, \quad z_{vv}=z_{xx}y^2+z_{yy}x^2+z_x x+z_y y$$

この結果を代入することで

$$(\text{右辺})=e^{-2u}(z_{uu}-z_{vv})=e^{-2u}(z_{xx}-z_{yy})(x^2-y^2)$$
$$=z_{xx}-z_{yy}=(\text{左辺})$$

合成関数の微分

問題（続き）

この解答に対して 100 点満点で得点を付け，100 点以外の点数を付けた場合はその理由を述べよ．