基礎数理 AII 第 3 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

12 月 11 日

全微分と接平面

1 変数関数の場合
$f(x_0+h) \cong f(x_0)+f'(x_0)h$
と "近似" できた。さらに
$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
を接線と呼んだ。
2 変数関数の場合でも同じように x, y の 1 次関数で "近似" できることを定義して、それに名前を付ける。またその時この 1 次関数は平面の方程式であり接平面と呼ぶ。

全微分と接平面

定義　ランダウの記号

1 変数関数 $f(x), g(x)$ に対して、
$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0, \quad (x \to x_0)$$
ならば $f(x) = o(g(x)) \quad (x \to x_0)$ と書く。
特に $x_0 = 0, \pm\infty$ などで、文脈から分かる場合 $f(x) = o(g(x))$ と省略することが多い。

最終的には極限を取りたいが、きっちりと書こうとすると、はさみうちの定理を使った不等式を使う必要があるときに、極限で消える誤差の部分を細かく書かずに、$o(\cdot)$ と省略したい。

全微分と接平面

定義　全微分

2 変数関数 $f(x,y)$ が
$f(a+h,b+k)=f(a,b)+Ah+Bk+o(\sqrt{h^2+k^2}),\quad (\sqrt{h^2+k^2}\to 0)$
と書けるような A,B が存在したとき、関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) で全微分可能と呼び
$df=Adx+Bdy$
と書く。

定理 7　全微分と偏微分

2 変数関数 $f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能ならば、関数 $f(x,y)$ は (a,b) で連続、偏微分可能で、
$f(a+h,b+k)=f(a,b)+f_x(a,b)h+f_y(a,b)k+o(\sqrt{h^2+k^2})$,
$(\sqrt{h^2+k^2}\to 0)$
になる。

全微分と接平面

定理 7 から逆に次が分かる。

系

2 変数関数 $f(x, y)$ が (a, b) で偏微分可能な時、この点で全微分可能になるための必要十分条件は
$f(a+h, b+k) - f(a, b) - f_x(a, b)h - f_y(a, b)k = o(\sqrt{h^2+k^2})$,
$(\sqrt{h^2+k^2} \to 0)$

注意

定理 7 の逆は成り立たない。すなわち
2 変数関数 $f(x, y)$ が (a, b) で連続、偏微分可能でかつ全微分可能でない関数が存在する。
例えば $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ (ただし $(a, b) = (0, 0)$ で)

全微分と接平面

定理 8

2 変数関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で偏微分可能で、さらに f_x, f_y が連続ならば $f(x,y)$ は (a,b) で全微分可能。

系

(1) 関数 $f(x,y)$ が C^1 関数であれば、全微分可能
(2) 関数 $f(x,y)$ の n 次偏導関数が全て連続であれば $n-1$ 次偏導関数も全て連続

全微分と接平面

注意

C^n 関数の定義で、 n 次偏導関数が全て連続として定義した。
上の系から $n-1$ 次偏導関数も全て連続になり、帰納的に n 次以下の偏導関数とその関数自身は全て連続になる。
通常の C^n 関数の定義は n 次以下の偏導関数とその関数自身が全て連続な関数で定義されるが、上の事実から、結果的には同じものになっている。

全微分と接平面

教科書に合わせて定理とするが、この授業では次の定理 9 で接平面、法線を定義している。

定理 9

2 変数関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能ならば曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $(a,b,f(a,b))$ において接平面と法線が存在して次のように与えられる。

接平面： $z=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+f(a,b)$

法線： $\dfrac{x-a}{f_x(a,b)}=\dfrac{y-b}{f_y(a,b)}=\dfrac{z-f(a,b)}{-1}$

ただし法線は、

$f_x(a,b)=0$ の場合 $x=a,\quad \dfrac{y-b}{f_y(a,b)}=\dfrac{z-f(a,b)}{-1}$,

$f_y(a,b)=0$ の場合 $y=b,\quad \dfrac{x-a}{f_x(a,b)}=\dfrac{z-f(a,b)}{-1}$

$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ の場合 $x=a,\quad y=b$ と解釈する。

全微分と接平面

例
$f(x, y) = x^2 + y^2$ とすると
$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y$ なので (a, b) での接平面は
$z = 2a(x - a) + 2b(y - b) + (a^2 + b^2)$
である。

問題

$f(x, y) = x^2 y^2$ の接平面を求めよ。