基礎数理 AI 第 14 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

7 月 31 日

積分の応用

定積分が面積と対応しているのは定義から明らか。

積分の応用

極座標

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

は回転対称性がある設定でよく使われる変数変換である。

定理 13

曲線 $r = f(\theta)$, $(\alpha \leq \theta \leq \beta)$ と $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ で囲まれる面積は

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)d\theta$$

積分の応用

○ 例 $r = a$： 半径 a の円（扇形）

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta a^2 d\theta = \frac{1}{2}a^2(\beta - \alpha)$$

特に $\alpha = 0,\ \beta = 2\pi$ とすれば円になり $S = \pi a^2$

○ 例 $r = a\theta$： アルキメデスの螺旋

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (a\theta)^2 d\theta = \frac{1}{6}a^2(\beta^3 - \alpha^3)$$

積分の応用

定義

曲線が

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

で与えられるとき曲線の長さを

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt$$

と定義する。

積分の応用

命題

特に $f(t)=t$ の場合

$$I=\int_\alpha^\beta \sqrt{1+(g'(t))^2}dt$$

極座標で $r=f(\theta)$ の場合は

$$I=\int_\alpha^\beta \sqrt{(f(\theta))^2+(f'(\theta))^2}d\theta$$

積分の応用

○ 例 $r = a$：半径 a の円（扇形）

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{a^2 + 0^2} d\theta = a(\beta - \alpha)$$

特に $\alpha = 0,\ \beta = 2\pi$ とすれば円になり $S = 2\pi a$

○ 例 サイクロイド

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

このとき $x' = a(1 - \cos t),\ \ y' = a \sin t$ より

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = 4a(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\beta}{2})$$

特に $\alpha = 0,\ \beta = 2\pi$ で $l = 8a$ になる。

積分の応用

定義

$y = f(x)$ 上の点 $(x, f(x))$ での曲率 κ、曲率半径 ρ を

$$\kappa = \frac{f''(x)}{\{1 + (f'(x))^2\}^{3/2}}, \quad \rho = \frac{1}{|\kappa|}$$

と定義する。

積分の応用

問題

アステロイド $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $(x, y \geq 0)$ はパラメータ表示

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$$

を持つ。この曲線の長さを求めよ。