基礎数理 AI 第 13,14 回目の問題に関して

永幡幸生
新潟大学工学部

8 月 18 日

広義積分

第 13 回目の問題

問題

広義積分 $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^{\alpha}}dx, \int_1^{e} \frac{1}{x(\log x)^{\alpha}}dx$ は収束するか？
収束すればその値を求めよ。

$\log x = t$ と置換積分すると、見覚えのある問題に書き換えられる。（以下省略）

広義積分

問題

広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^4 - 3x^3 + x^2 + 1}{(x-8)(x-7)(x-6)(x-5)^2(x-4)^2} dx$
は収束するか？(収束してもその値を求める必要はない)

分母が $x = 4, 5, 6, 7, 8$ で 0 になり結果として被積分関数がこれらの点で発散して広義積分になり、また元々積分区間が有界でないので都合 11 個の広義積分を考えていることになる。
すなわち被積分関数を $f(x)$ と書くことにすると、

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \Big(\int_1^4 + \int_4^{4.5} + \int_{4.5}^5 + \int_5^{5.5} + \int_{5.5}^6 + \int_6^{6.5} + \int_{6.5}^7 + \int_7^{7.5} + \int_{7.5}^8 + \int_8^{8.5} + \int_{8.5}^{\infty}\Big)f(x)dx$$

と書ける。

広義積分

結果的には最初の 10 個の積分（被積分関数が発散するもの）はすべて発散し、最後の積分（積分区間が有界でないもの）は収束する。

被積分関数が発散するものに関しては、例えば $x = 4$ のところでは $f(x) = g(x)\dfrac{1}{(x-4)^2}$ のように発散するパートである $\dfrac{1}{(x-4)^2}$ とその他の部分と分ければ $g(x)$ は具体的に書け、（少なくとも積分に関係する） $1 \le x \le 4.5$ では $g(x)$ の最大値、最小値も具体的に書き表すことができる。

慣れれば $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{(x-4)^2}dx$ が収束するか発散するかは計算しなくても分かるが、すぐには分からなくても、簡単に計算して確認することはできる。

この結果から、授業でも使った定理 12 もしくはその後の命題のどちらかを適用すれば、収束、発散どちらかを確認することができる。

広義積分

積分区間が有界でないものに関しては関数の極限を調べるときのように、被積分関数を

$$f(x) = \frac{1 + a_1\frac{1}{x} + a_2\frac{1}{x^2} + \cdots}{x^3(1 + b_1\frac{1}{x} + b_2\frac{1}{x^2} + \cdots)} = \frac{1 + a_1\frac{1}{x} + a_2\frac{1}{x^2} + \cdots}{1 + b_1\frac{1}{x} + b_2\frac{1}{x^2} + \cdots} \times \frac{1}{x^3}$$

と分解すれば、被積分関数が発散する場合と同じように、

$\displaystyle\int^{\infty} \frac{1}{x^3}dx$ の収束発散を確認すれば、定理 12 もしくはその後の命題のどちらかを適用できる。

（1 年生のうちはこのスライド程度の解答ではほぼ 0 点、途中の最大値、最小値などを求めて、定理 12 などを適切に適用するように）

積分の応用

第 14 回目の問題

問題

アステロイド $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $(x, y \geq 0)$ はパラメータ表示 $\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$ を持つ。この曲線の長さを求めよ。

教科書にほぼ同等の問題があるのでそちらを参照するように。
ただし条件 $(x, y \geq 0)$ が違うので注意するように。