

基礎数理 AI 第 9 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

7 月 14 日

積分

高校の数3では積分は微分の逆演算として定義した。一方でこれ
だとうまくいかない例があることが知られている。 $(\int e^{ax^2} dx)$

安全な定義としては面積に対応する定積分を定義して、その性質
から微分の逆演算として計算できるところは計算する方向にする。
この部分は教科書からは外れるので注意するように。

積分

定義 (分割)

区間 $I = [a, b]$ をいくつかの小区間に分割するがその分点を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

とするがこれを

$$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n; x_0 = a, x_n = b, x_{k-1} < x_k, (1 \leq k \leq n)\}$$

と書き

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \text{ (第 } k \text{ 区間の幅),}$$

$$|\Delta| = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \text{ (幅の最大値)}$$

とする。

積分

定義 (ダルブーの S, s)

関数 $f(x)$ と分割 Δ に対して、ダルブーの S, s を以下のように定める

$$S(f; \Delta) = \sum_{k=1}^n \sup\{f(x); x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \Delta x_k$$

$$s(f; \Delta) = \sum_{k=1}^n \inf\{f(x); x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \Delta x_k$$

注意

$$S(f; \Delta) \geq s(f; \Delta)$$

積分

分割を細かくとる（間に点を加える）と S は小さくなり、 s は大きくなる。

分割を細かくとることと、 $\inf_{\Delta} S(f; \Delta)$, $\sup_{\Delta} s(f; \Delta)$ が対応して

$$S(f) = \inf_{\Delta} S(f; \Delta), \quad s(f) = \sup_{\Delta} s(f; \Delta)$$

と定義すると少なくとも $S(f) \geq s(f)$ は分かり、 $S(f) = s(f)$ ならば面積に対応して定積分と思える。

定義（定積分）

$S(f) = s(f)$ の時、関数 $f(x)$ は区間 $I = [a, b]$ で積分可能で $S(f)$ を定積分と呼び、以下のように書く。

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \int_I f(x) dx, \quad \int_{[a,b]} f(x) dx$$

積分

この定積分の定義だと、その値は分からなくても、積分可能になる十分条件は良く知られている。

命題

区間 $I = [a, b]$ 上の単調関数は積分可能である

定理 6

区間 $I = [a, b]$ 上の連続関数は積分可能である

注意

区間 $I = (a, b)$ 上の連続関数は積分可能とは限らない

積分

命題

区間 $I = [a, b]$ 上で有限個の点を除いて連続な関数は積分可能である

○ 積分不可能な関数の例

区間 $I = [0, 1]$ 上で

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ は有理数} \\ 0 & x \text{ は無理数} \end{cases}$$

は積分不可能であるが、一方で

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ が無理数} \\ \frac{1}{p} & x = \frac{q}{p} \text{ (既約分数)} \end{cases}$$

は積分可能で $\int_0^1 g(x) dx = 0$ になる。

積分

○ 実際に簡単な関数で計算してみる。

区間 $I = [0, 1]$ 上で $f(x) = x$ として、

特別な分割として $\Delta_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ をとれば

$$S(f; \Delta_n) = \sum_{k=1}^n \sup\{f(x); \frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n}\} \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n} \frac{1}{n} = \frac{n-1}{2n}$$

同様に

$$s(f; \Delta_n) = \frac{n-1}{2n}$$

$S(f; \Delta_n)$ は n に関して単調減少で

$$\frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f; \Delta_n) \geq \inf_{\Delta} S(f; \Delta) = S(f)$$

同様に $s(f; \Delta_n)$ は単調増大で

$$\frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} s(f; \Delta_n) \leq \sup_{\Delta} s(f; \Delta) = s(f)$$

積分

これより $S(f) = s(f) = \frac{1}{2}$ が分かり、

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

であることが分かる。

積分

この定義による利点

かなり多くの関数が積分可能になる。
(例えば連続関数)

この定義による欠点

実際問題として計算不可能。
(被積分関数が x, x^2 程度なら和の公式を覚えているかもしれないが x^{10} にもなれば知らない。)

○ 次回この定積分の性質を調べることで、この欠点を解消する。
正確に言えば定積分の性質を調べることで、高校の数3のときのような計算（微分の逆演算）をすればこの定義と、同じ値になることが分かる。

問題

大学入試の知識で以下の不定積分を求めよ。なお教科書 p.64 の結果は既知としてよく、中には積分できないものも含まれているので注意するように。

$$(1)x^{\alpha}, \quad (2)e^{\alpha x}, \quad (3)e^{\alpha x^2}, \quad (4)\log x, \quad (5)\log_{\alpha} x,$$

$$(6)\sin x, \quad (7)\cos x, \quad (8)\tan x, \quad (9)\frac{1}{x^2 + a^2}, \quad (10)\frac{1}{x^2 - a^2},$$

$$(11)\frac{1}{\cos^2 x}, \quad (12)\arcsin x, \quad (13)\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4, \quad (14)\frac{1}{e^x + 1}$$