

# 基礎数理 AI 第 7 回目

永幡幸生  
新潟大学工学部

7 月 7 日

# 微分の応用

現在ではコンピューター上で各種ソフトウェアを使えば、ほとんどの関数のグラフを描画してくれるが、一方で関数から概形を得ることは重要である。

微分の定義から以下が分かる

## 定理 13

関数  $f(x)$  は  $[a, b]$  で連続、 $(a, b)$  で微分可能とする。

$\Rightarrow$

(1)  $(a, b)$  で  $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x)$  は  $[a, b]$  上定数関数。

(2)  $(a, b)$  で  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  は狭義単調増大。

$(f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  は狭義単調減少)

$\Leftarrow$  は成り立たない。

(3)  $(a, b)$  で  $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$  は単調増大。

$(f'(x) \leq 0 \Rightarrow f(x)$  は単調減少)

## 定義 (極大、極小)

関数  $f(x)$  が  $x = a$  を含む開区間  $I$  で  
 $x \neq a \Rightarrow f(x) < f(a)$  ならば  $x = a$  で極大  
( $f(x) \leq f(a)$  ならば広義の極大)  
 $x \neq a \Rightarrow f(x) > f(a)$  ならば  $x = a$  で極小  
( $f(x) \geq f(a)$  ならば広義の極小) と呼び  
その値を極大値、極小値と呼ぶ。  
また極大値、極小値をあわせて極値と呼ぶ。

## 定理 14

関数  $f(x)$  が  $x = a$  で広義の極値を取り微分可能  
 $\Rightarrow f'(a) = 0$

## 定理 15

$f'(a) = 0$ ,  $f''(a) \neq 0$  とする

$\Rightarrow$

$f''(a) > 0 \Rightarrow f(x)$  は  $x = a$  で極小

$f''(a) < 0 \Rightarrow f(x)$  は  $x = a$  で極大

# 微分の応用

## 定義 (下に凸、上に凸)

関数  $f(x)$  が閉区間  $I$  で下に凸

$\Leftrightarrow a < b < c$  ならば

$$f(b) \leq \frac{c-b}{c-a}f(a) + \frac{b-a}{c-a}f(c)$$

関数  $f(x)$  が閉区間  $I$  で上に凸

$\Leftrightarrow a < b < c$  ならば

$$f(b) \geq \frac{c-b}{c-a}f(a) + \frac{b-a}{c-a}f(c)$$

## 定義 (変曲点)

$x = a$  で下に凸から上に凸、または上に凸から下に凸へ変わるとき  $a$  を変曲点と呼ぶ。

## 定理 17 (凹凸)

以下は同値

- (1)  $f(x)$  は下に凸 (上に凸)
- (2)  $f'(x)$  は増加関数 (減少関数)
- (3)  $f(x)$  のグラフは接線より上 (下)
- (4)  $f''(x) \geq 0$  ( $f''(x) \leq 0$ )

## 命題

$f''(a) = 0$  かつ  $f'''(a) \neq 0$  ならば  $x = a$  は変曲点

$f''(a) = 0$  かつ  $x = a$  の前後で  $f''(x)$  の符号が変われば  $x = a$  は変曲点

# 微分の応用

○ グラフの概形を得るために

(1)  $f'(x), f''(x)$  を計算して  $f'(x) = 0, f''(x) = 0$  になる点を求める。

(2) 増減表を書いてみる。

○ 例

$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  の概形を書いてみる。

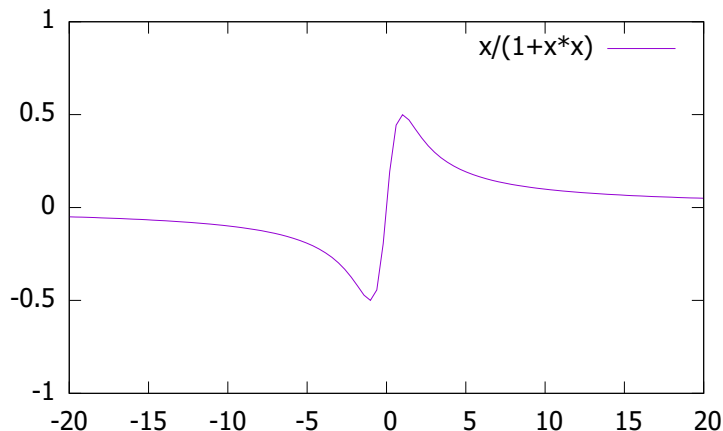
$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \text{ より}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1, \quad f''(x) = 0 \rightarrow x = 0, \pm\sqrt{3}$$

| x      | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$ | -1 | 0 | 1  | $\sqrt{3}$ | $\infty$ |
|--------|-----------|-------------|----|---|----|------------|----------|
| f(x)   | 0         | 変           | 極小 | 変 | 極大 | 変          | 0        |
| f'(x)  |           | -           | 0  | + | 0  | -          |          |
| f''(x) |           | -           | 0  | + | 0  | -          | +        |

# 微分の応用

実際にこの関数をソフトウェアを使って書くと



極小から極大の間の凹凸はこのグラフからは良く分らない。

## 問題

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3$$

の増減表を与え、概形を書け。

グラフソフトを使ってもよいが、使う前に必ず手書きで概形を書き、手書きのグラフを送るように。