基礎数理 AI 第 6 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

7 月 3 日

テイラー展開

関数の値を求めるのは非常に難しい。例えば $\sin 1$ を考えると $1 \cong \frac{\pi}{3}$ だから $\sin 1 \cong \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ と近似できるが、もっとよい近似を得られるか？
直接的にはこのような問題を考えられるが、理工系で、陰に陽に、多く使われている近似はほぼテイラー展開である。

テイラー展開

定理 8

関数 $f(x)$ は $[a, b]$ で連続、連続、(a, b) で微分可能、$f(a) = f(b)$
$\Rightarrow f'(c) = 0$ を満たす $a < \exists c < b$

定理 9　（平均値の定理）

関数 $f(x)$ は $[a, b]$ で連続、連続、(a, b) で微分可能、

$$\Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \text{ を満たす } a < \exists c < b$$

テイラー展開

定理 10　（コーシーの平均値の定理）

関数 $f(x), g(x)$ は $[a, b]$ で連続、連続、(a, b) で微分可能、
$g'(x) \neq 0$
$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$ を満たす $a < \exists c < b$

注意

定理 10 $\Rightarrow$ 定理 9 は明らかだが逆は自明でない。
定理 9 での c の値は $f(x)$ と $g(x)$ で違う値として成立している。

テイラー展開

定理 11　（テイラーの定理）

関数 $f(x)$ は a を含む区間 I で n 回微分可能
$\Rightarrow x \in I$ に対して

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n$$

ただし $R_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ となる
$a < \exists c < x$ もしくは $x < \exists c < a$

テイラー展開

注意

定理 11 のテイラーの定理は I の幅、もしくは $|x-a|$ に関して制限はないが、通常 $|x-a| \ll 1$ を想定している。
このため次数の高い項は誤差項とみなせ、テイラー展開は関数 $f(x)$ の多項式近似を与えていると思える。

注意

定理 11 のテイラーの定理で得られた $n-1$ 次の多項式

$$g(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

は次の意味で最適な近似

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^k} = 0 \text{ 但し } k \leq n-1$$

テイラー展開

定義

定理 11 のテイラーの定理において $R_n \to 0$ $(n \to \infty)$ であれば $f(x)$ は a の周りでテイラー展開可能といい

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

テイラー展開

∘ 例 $\sin x$ のテイラー展開

$f(x) = \sin x$ とすると $f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$,

$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$, $\quad f'^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$

従って $x = 0$ の周りでテイラー展開すれば

$$f(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \cdots$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

一方で $x = \frac{\pi}{3}$ の周りでテイラー展開すれば

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{1!}(x - \frac{\pi}{3}) + \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2!}(x - \frac{\pi}{3})^2 + \frac{-\frac{1}{2}}{3!}(x - \frac{\pi}{3})^3 + \cdots$$

テイラー展開

スライド冒頭で挙げた $\sin 1$ の近似はどちらでもできるが、同じ次数まで考えると $x=1$ と 展開の中心との距離が近い $x=\frac{\pi}{3}$ の周りでのテイラー展開が有利であるが、$x=0$ の周りでテイラー展開すると出てくる項の係数に 0 が多いため高次まで簡単に計算できるため簡単な比較はできない。なお実際に計算してみると

$x=0$ の周りでテイラー展開

$$\sin 1 \cong 1-\frac{1}{6}+\frac{1}{120} \cong 0.825\cdots$$

$x=\frac{\pi}{3}$ の周りでテイラー展開

$$\sin 1 \cong \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}(1-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{8}(1-\frac{\pi}{3})^2 \cong 0.843\cdots$$

問題

定義

$f(x)=\log(1+x)$ を $x=0$ の周りでテイラー展開せよ。

問題

$f(x)=\arctan x$ を $x=0$ の周りでテイラー展開し、π の近似値を与えよ。
ヒント:これまでに出してきた問題は参照して構わない。マチンの公式を見直すように。
電卓（四則演算まで）使用可